le petit **archimède**

vous presente

LE NOUVEL ARCHIMÈDE

1984 : 3 numéros

N° 101

Juin 1984

SOMMAIRE

Atelier d'astronomie	03
Pascal	05
I.L.F.	16
Informatique	18
Algorithmique	22
Les jeux du Nouvel Archimède	24
Echecs	25
Dames	26
Notes de lecture	27
Questions-Réponses	29
Solution des échecs	30
Les problèmes du Nouvel Archimède	31

EN GUISE D'EDITORIAL.

Depuis son annonce en FEVRIER 1984, il aura fallu quelques mois pour que votre périodique, avec les transformations prévues, voie le jour.

L'auteur de cette revue est toujours l'Association pour le Développement de la Culture Scientifique. Mais l'A.D.C.S. est aussi l'éditeur de cette publication qui, de surcroît, a été entièrement composée dans ses bureaux. Vous conviendrez donc que cette mouture nouvelle a réclamé bien des réunions, bien des travaux,...-Tout ceci pour vous expliquer cette longue attente.

Ce numéro est construit autour d'un article central. Vous y trouverez aussi des rubriques: les unes habituelles, d'autres nouvelles; d'autres encore attendent dans nos cartons...le prochain numéro. N'hésitez pas à nous écrire pour toute suggestion, proposition, demande d'information,...

LE NOUVEL ARCHIMEDE, en 1984, c'est 120 pages par an, en au moins trois numéros.

Bonne lecture et ...à vos plumes.

La rédaction

L'atelier d'astronomie

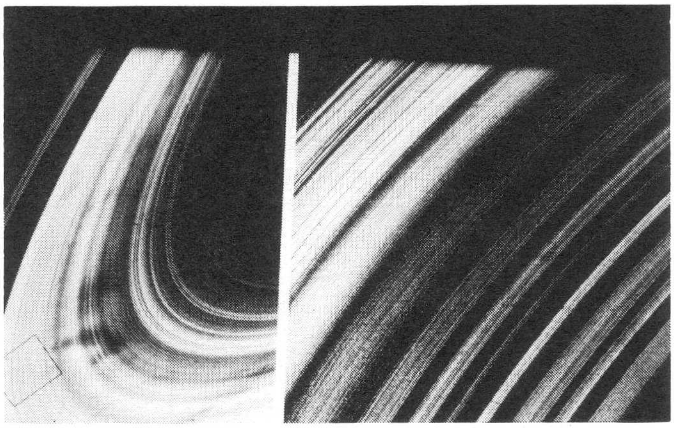
Cette chronique, l'Atelier d'astronomie, devrait faire écho aux questions que, les uns et les autres, lecteurs du NOUVEL ARCHIMEDE, nous nous posons sur cet Univers dans lequel nous avons la bonne surprise de vivre. Où sommes-nous? On dirait bien que nous sommes au centre ; est-ce vrai ou n'est-ce qu'une illusion ? Depuis le temps que les astronomes observent le ciel, connaissent-ils tous les astres ? On ne peut le croire puisque de nouveaux instruments permettent d'en découvrir de nouveaux, les journaux l'annoncent : des anneaux autour de Jupiter, des étoiles à neutrons, des pulsars, des quasars,... une étrange ménagerie dans laquelle, il faut bien l'avouer, on se perd un peu. Cet atelier d'astronomie devrait nous aider à y voir plus clair soit par ses explications, soit par ses conseils pour lire de bons ouvrages ou construire des instruments simples et pas trop coûteux.

Saturne en 1684 et en 1984

Dans le JOURNAL DES SCAVANS du Lundi 22 Avril MDCLXXXVI, Jean-Dominique Cassini, de l'Académie Royale des Sciences, annonce ainsi la découverte de deux nouveaux satellites de Saturne :

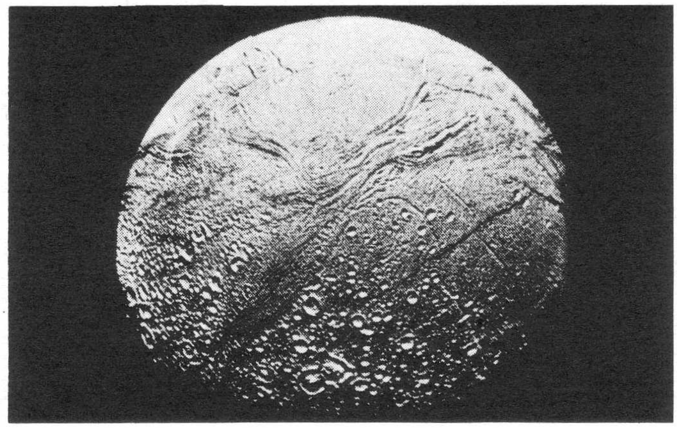
"La variété des objets admirables que l'on a découverts en ce siècle dans le Ciel depuis l'invention de la Lunette, et le grand usage qu'on s'est proposé d'en faire pour la perfection des Sciences Naturelles et des Arts nécessaires au Commerce et à la Société des Hommes, ont poussé les Astronomes à rechercher avec soin s'il n'y avait pas quelque chose d'extraordinaire, qui n'eût point encore été aperçu.

Comme ils ont fait tous leurs efforts pour épuiser ce qui restoit de plus remarquable, ils n'ont laissé à découvrir à la postérité que ce qu'il y a de plus caché et de plus difficile. On peut mettre dans ce rang les deux satellites de Saturne que nous avons découverts depuis peu à l'Observatoire Royal lesquels, joints aux deux autres que nous avions découverts auparavant, et à celui dont



DIAPOSITIVE 1

Les anneaux de Saturne ont été découverts par Galilée, mais c'est Huygens qui comprit leur nature. Les sondes Voyager nous les ont révélés comme étant composés par une multitude d'annelets contigus.
Ici une partie de l'anneau B, vue par Voyager 2 le 22 août 1981, et la même région (partie encadrée), trois jours plus tard.



DIAPOSITIVE 2

Le satellite Encelade, qui mesure 500 km de diamètre et dont la nature est à mi-chemin entre le bloc rocheux et la boule de glace (cliché pris par Voyager 2, le 25 aout 1981).

nous devons la découverte à M. Hugens (sans compter les deux Anses latérales qu'il a démontré estre les parties d'un anneau qui environnent son globe) font une cour à Saturne plus nombreuse que celle de Jupiter, qui n'a que les quatre satellites découverts au commencement de ce siècle par Galilei."

En 1684, la situation, quant à Saturne, est donc la suivante : Huygens (rectifions l'orthographe de son nom) a expliqué en 1654 que les deux "anses latérales" observées étaient l'apparence d'un anneau très fin entourant la planète. En 1655, il découvre Titan, le plus gros satellite de Saturne qui gravite autour de la planète en 16 jours.

Cassini à son tour découvre en 1671 Japet qui fait le tour de Saturne en 79 jours et en 1672, Rhée qui ne met que 4.5 jours à faire le tour de la planète. La découverte qu'il annonce en 1684 par le texte cité plus haut est plus extraordinaire : ce sont deux objets très petits et très proches de la planète, Tethys et Dioné qui font le tour de Saturne en 1,88 jour et 2,7 jours.

Cassini a raison, en 1684 la "cour" de Saturne est plus nombreuse que celle de Jupiter.

En 1984, le bilan quantitatif est encore à l'avantage de Saturne. Grâce à l'exploration rapprochée par les sondes Voyager qui ont visité les banlieues de Jupiter (en 1979) et de Saturne (en 1981), on peut dire, en attendant mieux, car l'analyse des données recueillies est loin d'avoir encore tout révélé, que Jupiter est crédité de seize satellites et d'un anneau relativement simple ; Saturne, lui, est crédité de vingt et un satellites et d'un anneau à structure beaucoup plus complexe.

Que devons-nous admirer le plus ? L'habileté de l'observateur J-D. Cassini, en 1684, à l'oculaire des modestes lunettes de l'époque ou les caméras perfectionnées des sondes Voyager ?

Mais pourquoi admirer les uns plus que les autres ?

K. Mizar.

N.B. Pour plus de détails sur le système de Saturne, consulter les articles sur "les anneaux" et "les satellites" par André Brahic dans LE GRAND ATLAS DE L'ASTRONOMIE édité par Encyclopaedia Universalis (p.190 à 203).

RECOMMANDATION : pour toute question relative à cette chronique "l'atelier d'astronomie", écrivez à Gilbert Walusinski 26 Bérengère, 92210 St-Cloud, qui transmettra à K. Mizar.

Pascal

Né le 19 Juin 1623 à Clermont Ferrand, le jeune Blaise perd sa mère à l'âge de trois ans et son père,président à la Cour des Aides, s'attache plus fortement aux soins de la famille(d'après la biographie écrite par sa soeur), sollicitant sans cesse ce jeune esprit avide de connaissances. Etienne, le père de Blaise est par ailleurs un très bon géomètre, nous dit le Père Mersenne et la conchoïde du cercle qu'il étudie sera ultérieurement appelée, sur proposition de Roberval, le limaçon de Pascal.

Nous nous bornerons ici à une brève étude de trois aspects de l'oeuvre scientifique de Pascal, en laissant volontairement à l'écart l'oeuvre profondément militante de l'apologiste de la religion chrétienne marquée par des écrits nombreux.

LA PASCALINE, UNE OEUVRE DE JEUNESSE :

La machine arithmétique de Blaise Pascal (1623-1662) est la première machine à calculer qui ait été réalisée. Elle fonctionne selon le principe du totalisateur, déjà appliqué dans l'Antiquité gréco-romaine pour la construction d'odomètres.

Le seul devancier connu de Pascal est l'astronome allemand Wilhelm Schickard (mort en 1635), un correspondant de Képler, qui construisit une additionneuse en 1623-1624, mais sans déboucher sur rien de pratique.

C'est qu'à la différence de Pascal, Schickard n'avait pas résolu le problème dynamique posé par le report des dizaines. Dans le dispositif imaginé par Pascal (le sautoir) l'énergie nécessaire est accumulée grâce à un poids qui est soulevé progressivement au fur et à mesure qu'un cylindre avance, et qui retombe au moment du passage de 9 à zéro, en faisant avancer d'un chiffre le cylindre d'ordre immédiatement supérieur.

Les additions s'effectuent donc simplement en manoeuvrant les inscripteurs

---

PASCAL

symbole: Pa. dimension: $M L^{-1} T^{-2}$
Unité de pression: pression à laquelle est soumis un gaz comprimé dans un cylindre sur le piston duquel on exerce une force de un Newton par m^2.

Correspondances:

1 millibar =100 Pa
1 mm de mercure= 1 torr =133,3 Pa
1 atmosphère =101325 Pa = 760 torr

PASCAL (et PASCALINE).

PASCAL (Programme Appliqué à la Sélection et à la Compilation Automatique de la Littérature); créé en 1971. Près de 3000000 de signalements bibliographiques consultables.

PASCALINE: Trois réseaux accessibles par téléphone (Réseau CYCLADES, ESANET, TYMNET) permettent d'interroger la base de données PASCAL à partir de très nombreux points du globe.
D'autres services (recherche, traduction)également offerts par
CNRS INFORMASCIENCE, 26 rue Boyer, 75971 Paris Cedex 20

PASCAL

Langage de programmation inventé en 1968 par le professeur N. WIRTH, de Zurich; issu de l'Algol 60 ,Pascal fait partie d'une grande famille: Algol 60, 68, W, langage C, Ada,...
Exemple de programme écrit en Pascal:

```
PROGRAM HANOI ;
PROCEDURE DEPLACER(N,I,K:INTEGER);
   BEGIN
   IF N=1 THEN WRITELN(I,'=>',J)
          ELSE BEGIN
               DEPLACER(N-1,I,6-I-J);
               DEPLACER(1,I,J);
               DEPLACER(N-1,6-I-J,J)
               END
   END;
BEGIN
   READ(N);
   DEPLACER(N,1,2)
END.
```

comme un cadran de téléphone, et en posant les chiffres à partir de la droite.

On peut réaliser une multiplication en faisant plusieurs additions successives ; par exemple le multiplicateur 132 conduit à poser les six nombres suivants : deux fois de suite le multiplicande, trois fois de suite son décuple, une fois son centuple.

En vue de la soustraction, les tambours de la machine portent une deuxième série de chiffres en sens inverse de la série principale, la somme de deux chiffres superposés étant toujours égale à 9. Pour effectuer la soustraction on pose le plus grand des deux nombres en inscrivant le complément à 9 de chacun de ses chiffres (246 devient 753 par exemple).

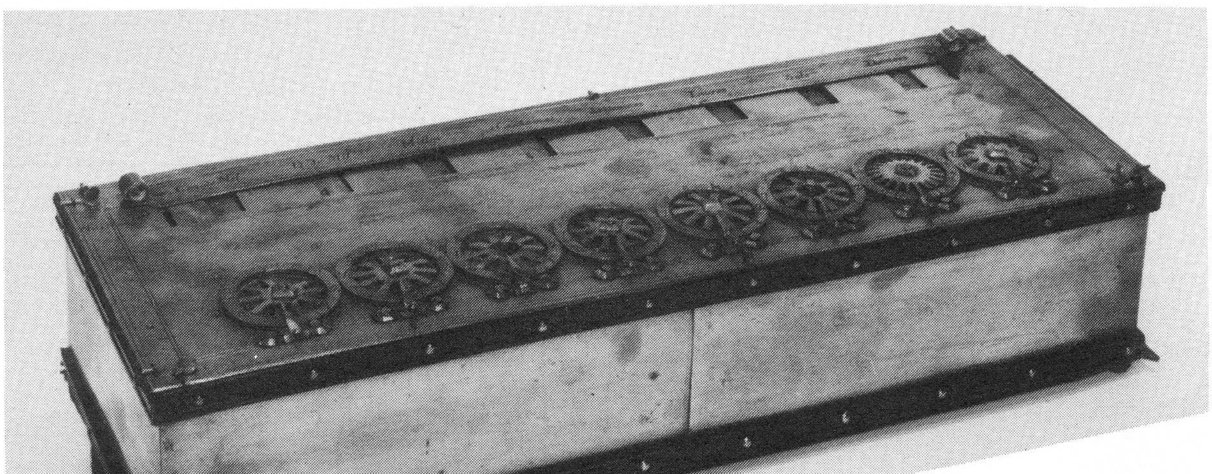
Une baguette coulissante qui occupe toute la longueur de la machine permet de démasquer à volonté l'une ou l'autre des deux séries de chiffres.

Un artifice comparable à celui employé pour la multiplication, mais trop long pour être expliqué ici, permet d'effectuer aussi la division, cette opération équivalant, comme on le sait, à des soustractions successives.

La machine du chancelier Séguier est à 8 axes soit six chiffres décimaux plus les sous et les deniers. Dans l'ancien système monétaire la livre se divisait en 20 sous et le sou en 12 deniers. C'est pourquoi le premier inscripteur à droite est à 12 chiffres, et le suivant à 20 chiffres, alors que les 6 autres sont à 10 chiffres.

Pascal avait commencé ses recherches sur la machine arithmétique en 1642, à l'âge de 19 ans, dans le but de soulager son père qui, employé de l'administration des Finances, était surchargé de calculs très complexes. Le modèle définitif fut en état de fonctionner en 1645. Pascal obtint un privilège royal en 1649. Mais l'usage de la machine arithmétique ne se répandit pas dans la pratique. Le prix restait élevé et dans l'ensemble le public n'avait sans doute pas réellement besoin de machines à calculer. Du reste, quoique Leibniz ait imaginé vers la fin du XVIIe siècle une multiplicatrice beaucoup plus commode, ce n'est qu'au milieu du XIXe siècle que les machines à calculer sont devenues usuelles.

On connaît aujourd'hui à peine une dizaine d'exemplaires authentiques de la machine arithmétique.



La pascaline du Chancelier Seguié
Coll. et Cl. Musée National des Techniques.
Conservatoire National des Arts et Métiers. Paris.

L'exemplaire ici reproduit porte une dédicace manuscrite, vraisemblablement autographe de la main de Pascal, adressée au chancelier Séguier, à qui la machine a dû être offerte en vue d'appuyer la demande du privilège.

La machine avait été sauvée de la ferraille à l'époque révolutionnaire et est restée ensuite dans une collection privée jusqu'en 1951, époque à laquelle la compagnie IBM, qui l'avait acquise, l'a cédée au CNAM en échange d'un autre exemplaire possédé par cet établissement, mais de provenance inconnue.

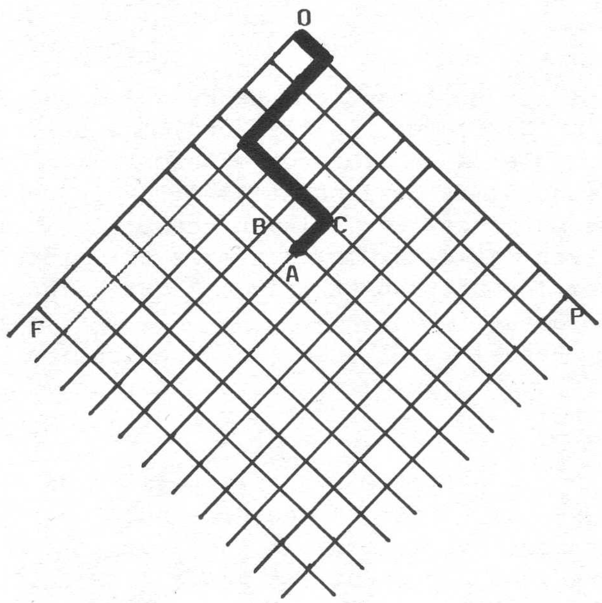


Figure 1

FABRIQUEZ DES TRIANGLES DE PASCAL

(voir PA N° 1 page3!)

Règle du jeu : On se déplace dans le quadrillage (fig 1) en partant du sommet O et toujours vers le bas. A chaque noeud, on peut donc choisir la maille de gauche P ou bien celle de droite F, mais on ne peut pas remonter. Chaque chemin sera codé par une suite de symboles binaires (F ou P) .Exemple : le chemin OA de la figure 1 est codé PFFFPPPF. Pour DENOMBRER les chemins aboutissant à A, on remarque que l'un quelconque de ces chemins ne peut provenir que du noeud B ou bien du noeud C. On réalise alors ce dénombrement de proche en proche en partant du sommet O et le tableau obtenu (fig 2) est une présentation du TRIANGLE DE PASCAL. Admirons en passant la jolie symétrie de ce tableau. Pour CODER LES NOEUDS de ce tableau, on adopte les conventions suivantes : les lignes sont indexées de haut en bas par les entiers naturels successifs $n=0, 1, 2,...$ Dans chaque ligne les noeuds sont numérotés de gauche à droite par les entiers naturels successifs $p=0, 1, 2, ..., n$. Il revient au même de numéroter de droite à gauche vu la symétrie. Un noeud correspond à la donnée du couple (n,p) et on désignera le nombre qui s'y trouve soit par $\binom{n}{p}$ soit par C_n^p

Ainsi le noeud A correspond au nombre $\binom{8}{4}=70$. La symétrie observée plus haut s'exprime simplement par $\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$ et la relation de récurrence qui a servi à remplir ce tableau s'écrit

$$\binom{n}{p}=\binom{n-1}{p}+\binom{n-1}{p-1}$$

On trouve aussi ce "triangle arithmétique", ainsi que Pascal le nomme dans son traité de 1654 (publié en 1665), sous l'une des formes présentées en figures 3 et 4.

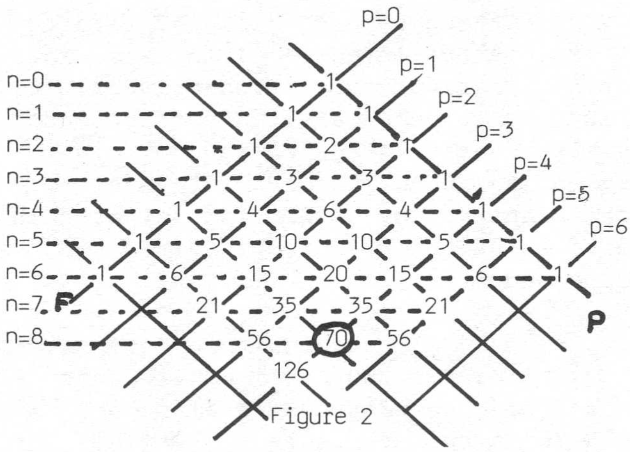


Figure 2

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	
1	3	6	10	15		
1	4	10	20			
1	5	15				
1	6					
1						

Figure 3
(obtenue par rotation
à partir de la figure 2)

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Figure 4
(déformation du
quadrillage)

DE QUI EST LE "TRIANGLE DE PASCAL"?

De l'aveu même de Pascal (page 129 de l'édition de "la Pléiade") il doit son triangle à un obscur mathématicien allemand nommé Hérigone (1634). Mais un autre mathématicien, flamand celui-là, Simon Stevin (1548-1620) l'a semble-t-il inspiré au moins par son traité de "statistique et hydrostatique" (on y trouve le "principe de Pascal") et, dans une publication de 1625 de Stevin, figure un "triangle de Pascal".

On trouve avant le "traité du triangle arithmétique" une dizaine d'ouvrages reproduisant le célèbre tableau. L'un du père Izquierdo publié 6 ans avant lui, un autre de Nicolas Tartaglia, publié en 1556: le "Traité général des nombres et de la mesure" où il figure à propos d'un problème sur le jeu de dés...

Citons encore Michel Stifel dont l'"Arithmetica Integra" (1543) a pu inspirer Stevin ainsi que Petrus Apianus (1495-1552) astronome à l'université d'Ingolstadt (observateur de la comète de Halley en 1531 donc 76 ans avant Kepler, 151 ans avant Halley et 228 ans avant Clairaut) qui a pu fort bien inspirer tous ses successeurs.

En 1303 on connaît un "triangle de Chou Chi Kié" (1280-1303) publié dans "Miroirs précieux des quatre éléments" (Ssu Yuan Yu Chien) et l'auteur, chinois, prétend que "cet arrangement (fig 5) provient d'une vieille méthode pour calculer les puissances jusqu'à 8 en descendant". Il s'agit, en effet, d'un moyen de déterminer les coefficients des monômes dans le développement du binôme $(a+b)^n$ de $n=0$ à $n=8$ "en descendant" dans la disposition de la figure 2. Dans cet ouvrage l'algébriste chinois s'attaque à la résolution d'équations allant jusqu'au 14ème degré , aux systèmes d'équations et procède à des sommations de séries. Tout cela le situe hors de la sphère des "amusettes scientifiques"...

En 1180 le fils d'un rabbin, né au Maroc et fixé à Bagdad, s'éteint à Maragha en laissant une oeuvre "le livre lumineux sur l'arithmétique" (Al-Bahir fi'ilm al hisab) conservé à la bibliothèque Aya Sofya d'Istambul. Dans cette oeuvre, l'auteur (As Samaw'al Ibn Yahya Al-Maghribi) médecin, philosophe et mathématicien affirme avoir emprunté son tableau (fig 6) au mathématicien Al-Karaji né un peu avant l'an mille.

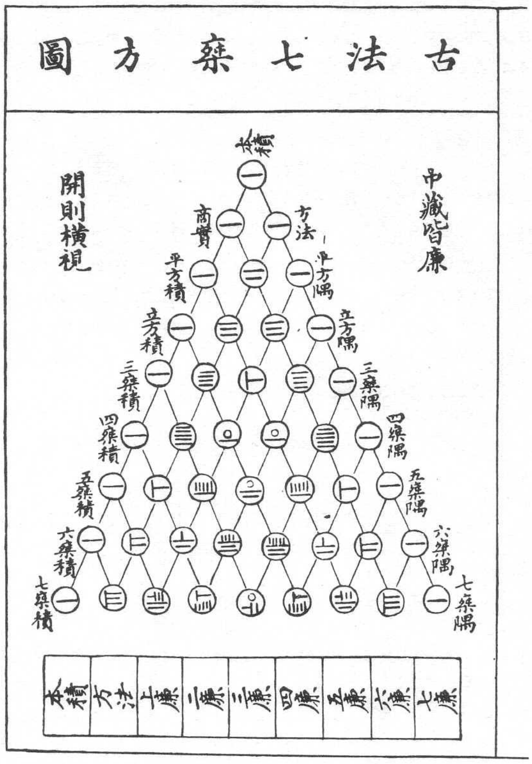


Figure 5
(tiré du livre
de COLLETTE)

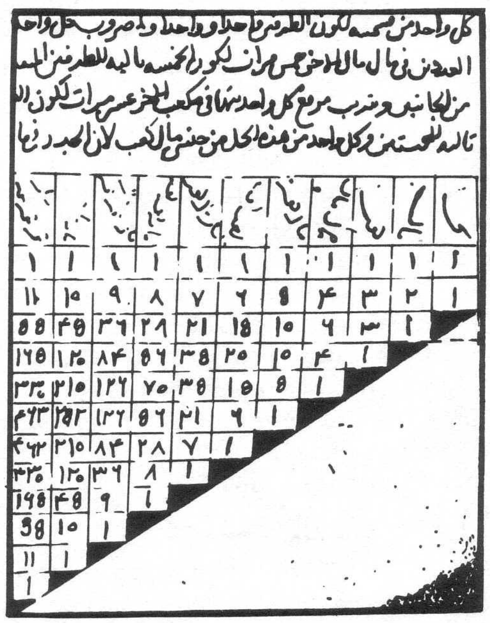


Figure 6
(tirée de IFRAH)

D'après H. E. Huntley ("The divine Proportion") lequel s'appuie sur l'historien anglais des sciences Georges Sarton, il faut croire que Leonard de Pise (alias Fibonacci) connaissait le triangle arithmétique au moment de la rédaction du Liber Abaci (le "livre de l'abaque" publié en 1202). Ceci expliquerait qu'on trouve la "suite de Fibonacci" dans le triangle arithmétique ainsi que le montre la fig. 7 empruntée de "Mathematical Carnival" où Martin Gardner (page 197) étudie le triangle de Pascal et précise que Omar Khayyam connaissait cette figure en 1100 (donc après Al-Karaji). Quoi qu'il en soit, Fibonacci (né en 1175) accompagne son père à Bougie (Algérie) où celui-ci est chargé de diriger la douane, il se met alors à étudier le système indo-arabe d'Al-Khwarizmi au cours d'un voyage en Arabie, au moyen-orient et en Afrique du Nord et il revient en Italie en 1200. Les oeuvres d'Al-Karaji sont perdues et il y a des lacunes dans celles d'Al-Khwarizmi. Leur inspirateur indien est inconnu. Ainsi se vérifie le célèbre aphorisme "Tout innovateur en copie un plus ancien, excepté le premier qui demeure inconnu..."

En conclusion : Qu'est-ce qui distingue Pascal de ses devanciers ?

Un plus grand souci de rigueur. Pascal DEMONTRE, et semble-t-il (ce qui nous invite à la prudence), il innove en faisant des DEMONSTRATIONS PAR RECURRENCE (d'ailleurs difficiles à suivre, son formalisme étant confus).

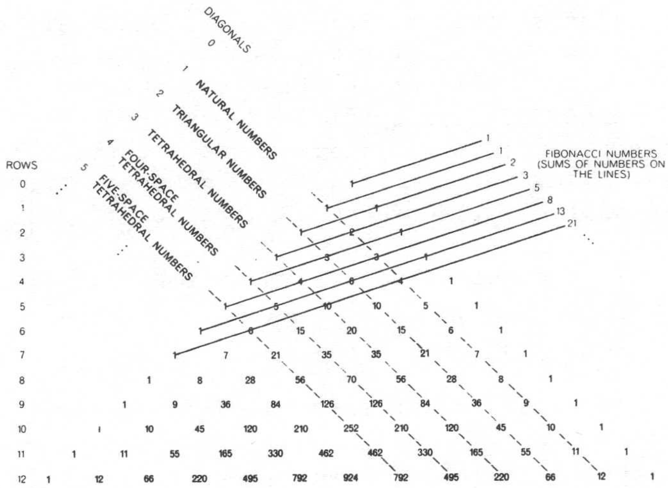
Un souci de GENERALISER. Venu à l'étude du triangle à partir du problème des "partis" qu'il traite dans la section III, il cherche aussitôt d'autres applications (déjà connues en partie de ses devanciers dont Hérigone qu'il cite à ce moment) "trouver les puissances des binômes et des apotomes", calculer les combinaisons", évaluer des probabilités.

ETUDE DU TRAITE

La première conséquence est pour dire que les 2 diagonales immédiatement inférieures ne sont composées que de "G". Le triangle ainsi construit est obtenu en multipliant par G tous les nombres de la fig. 2. Il le remarque lui-même et l'exprime dans des "avertissements" qui suivent les conséquences 8ème et 9ème (voir fig.8).

La conséquence 2ème s'écrirait avec la notation $\binom{n}{p}$ déjà vue :

$$\binom{n}{p}=\sum_{k=0}^{p}\binom{n-1}{k} \quad \text{et la } 3^{\text{ème}} \quad \binom{n}{p}=\sum_{k=0}^{p-1}\binom{n}{k}$$



r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	···
FIBONACCI SERIES	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	···
n														
0	1													
1	1	1												
2	1	2	1											
3	1	3	3	1										
4	1	4	6	4	1									
5	1	5	10	10	5	1								
6	1	6	15	20	15	6	1							
7	1	7	21	35	35	21	7	1						
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1					
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1				
10	1	10	45	120	210	···					1			
11	1	11	···											55
12	1	12	···											

Figure 7

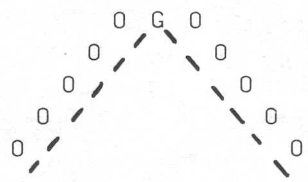


Figure 8

"chaque cellule est la somme de toutes celles du rang "parallèle" précédent de son rang "perpendiculaire" jusqu'au 1er exclusivement".

Ici les mots "rang parallèle" et "rang perpendiculaire" pourraient être remplacés par "abscisse" et "ordonnée", plus modernes...(fig.9)

La 3ème proposition est obtenue en faisant jouer la symétrie du tableau. Exemple : 56 =35+15+5+1 et aussi 56= 21+15+10+6+3+1 (fig.10) La démonstration se fait par récurrence à partir de $\binom{n}{p}=\binom{n}{p-1}+\binom{n-1}{p-1}$

La conséquence 4ème dit que :

$$\binom{n}{p}-1=\sum_{j\leqslant i<n}\binom{i}{j}$$

et se prouve à partir de 2 ou 3 par récurrence.
Exemple 56-1=55 est la somme de tous les nombres compris dans le rectangle au-dessus de 56.

Les conséquences 5 et 6 sont l'expression de l'évidente symétrie du tableau: $\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$

Les conséquences 7 et 8 montrent que la somme des "cellules d'une même base" est une puissance de 2 dont l'exposant est le numéro de la base.
Ainsi, par exemple, $1+4+6+4+1=16=2^4$ ou encore $1+6+15+20+15+6+1=64=2^6$

Plus généralement : $\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}=2^n$

Les conséquences 9 et 10 sont des applications de $2^n-1=2^{n-1}+2^{n-2}+\dots+1$
et disent (9) qu'une base quelconque moins l'unité est somme de toutes les cellules écrites au-dessus.

La conséquence 11 dit que :

$$\binom{2n}{n}=2\binom{2n-1}{n-1}$$

exemples : 70= 2x35, 20= 2x10, 6= 2x3...

Les nombres 70, 20, 6 sont sur la bissectrice du triangle et les nombres 35, 10, 3 sont sur une ligne que Pascal appelle "dividente".

Pascal démontre longuement la 12ème conséquence. Citons -in extenso- le passage où figure un raisonnement par récurrence: (voir bandeau de droite. Remarquer l'INITIALISATION DE LA RECURRENCE et le PASSAGE D'UNE ETAPE A LA SUIVANTE). Suit alors dans le cas particulier de cette proposition 12 le classique : "Si... vrai au rang n... Alors... vrai au rang n+1" dont je passe ici les détails techni-

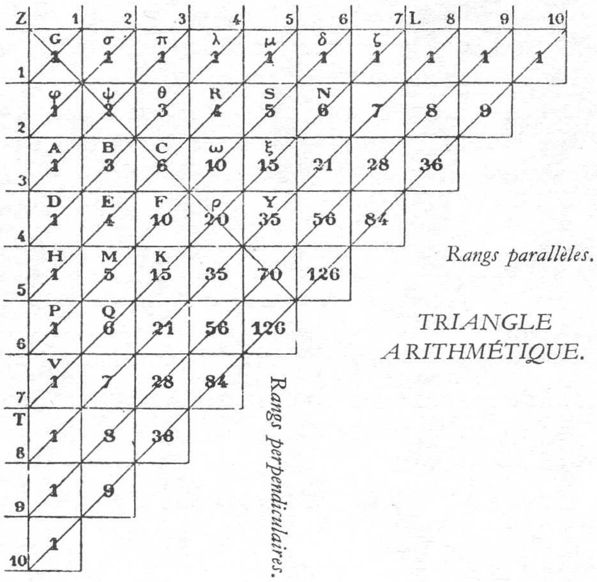


Figure 9
tiré de LA PLEIADE

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Figure 10

Quoique cette proposition ait une infinité de cas, j'en donnerai une démonstration bien courte, en supposant 2 lemmes.

Le 1, qui est évident de soi-même, que cette proportion se rencontre dans la seconde base; car il est bien visible que φ est à σ comme 1 à 1.

Le 2, que si cette proportion se trouve dans une base quelconque, elle se trouvera nécessairement dans la base suivante.

D'où il se voit qu'elle est nécessairement dans toutes les bases : car elle est dans la seconde base par le premier lemme; donc par le second elle est dans la troisième base, donc dans la quatrième, et à l'infini.

Il faut donc seulement démontrer le second lemme, en cette sorte.

ques.
L'énoncé de cette proposition 12 pourrait se formuler ainsi :

$$\frac{C_n^{p+1}}{C_n^p} = \frac{n-p}{p+1}$$

Dans chaque ligne n le rapport d'une cellule à la cellule qui est à sa gauche est égal au rapport du nombre de cellules à sa droite plus un au nombre de cellules qui est à sa gauche.

Exemple : $\frac{70}{56} = \frac{5}{4}$

Les conséquences 13 et 14 s'expriment respectivement par :

$$\frac{C_n^p}{C_{n-1}^p} = \frac{n}{n-p} \quad , \quad \frac{C_n^p}{C_{n-1}^{p-1}} = \frac{n}{p}$$

Les conséquences 15 et 16 sont une réécriture des conséquences 13 et 14 au moyen de la conséquence 2 (ou 3) c'est-à-dire en écrivant C_n^p comme la somme de toutes les cellules du rang inférieur.

La conséquence 17 est rigoureusement la même chose que la conséquence 12 formulée autrement (en conséquence de 2 et 3). Une cellule appartient à 2 rangs et cette proposition dit que la somme des cellules d'un rang, divisée par la somme des cellules de l'autre, est égale au rapport du nombre de cellules de ce rang au nombre de cellules de l'autre.

Exemple : 35+20+10+4+1=70
35+15+5+1=56

et $\frac{70}{56} = \frac{5}{4}$

(il y a 5 cellules dans un sens et 4 cellules dans l'autre en partant de 35 -compris- jusqu'au bord du tableau).
En fait, on remarque que les sommes soulignées ci-dessus sont les 2 nombres contigus inférieurs à 35 et si on projette les cellules de l'une et l'autre rangée sur la base inférieure à 35 dans les directions réciproques de ces rangées on retrouve exactement la 12ème conséquence.

La conséquence 18 est très amusante. C'est une sorte de "Théorème de Thalès" à l'intérieur du triangle arithmétique. Une base et un côté du triangle découpent sur les parallèles à l'autre côté des "segments" composés de plusieurs cellules et le rapport de la somme des cellules de 2 segments est égal au rapport des nombres de cellules de chaque segment. Si on regarde bien, c'est encore une formulation de la proposition 12.

Pascal fournit encore deux autres propositions mais se rendant compte, sans doute, d'une absence de profondeur de tous ces résultats, il signale l'existence d'autres propriétés dans un avertissement que nous reproduisons.(voir page suivante)

ETUDE DE CONFIGURATIONS

Il observe alors que les naturels successifs figurent dans la rangée p= 1, les triangulaires successifs dans la rangée p=2, les pyramidaux dans p=3. Ceci dû au fait qu'un nombre d'un ordre est somme de tous ceux de l'ordre immédiatement inférieur.(voir Figure 2)

Dans la section II Pascal définit clairement ce qu'il appelle combinaison :

"Ainsi on trouvera, par expérience, qu'il y a six manières différentes d'en choisir deux dans quatre; car on peut prendre A et B, A et C ou A et D, ou B et C, ou B et D, ou C et D.

Je ne compte pas A et A pour une des manières d'en prendre deux; car ce ne sont pas des choses différentes, ce n'en est qu'une répétée." Il s'agit donc de dénombrer les p-parties dans un n-ensemble et il écrit comme proposition II ce que tout bachelier sait désormais , que ce nombre est $\binom{n}{p}$ ou C_n^p (voir plus haut ces notations).

La section III du traité aborde le fameux problème des "partis" qui peut se formuler ainsi :

"Les deux partenaires décident d'interrompre un jeu de hasard et souhaitent se répartir équitablement l'enjeu". EQUITABLEMENT signifie ici que les deux joueurs tiennent compte de leurs gains respectifs au moment de l'interruption mais aussi de leurs chances de gagner SI LA PARTIE S'ETAIT POURSUIVIE...

Cette section III est affreusement technique et vieillotte vu le manque de formalisme et occupe 11 pages sur les 38 du traité. Nous n'entrerons pas dans le détail des questions qui y figurent et qui font maintenant partie des connaissances en "calcul des probabilités" de tout bachelier.

Ce qui intéresse l'historien de la pensée scientifique c'est que dans ce traité du triangle arithmétique on voit pour la première fois apparaître un discours rationnel dans ce qui semblait le fief de l'irrationnel : les jeux de hasard! Et c'est à bon droit que Pascal apparaît ainsi comme le fondateur du CALCUL DES PROBABILITES qui prend dans le siècle suivant, avec Bayes et les Bernoulli , une importance considérable tant dans les sciences pures que dans les applications pratiques (statistiques, assurances, etc...)

La section IV fournit la célèbre formule du "binôme de Newton" :

$$(a+b)^n=\sum_{p=0}^{n} C_n^p\, a^p\, b^{n-p}$$

à noter que Pascal opère une distinction qu'on ne fait plus de nos jours entre les binômes, où a et b ont le même signe, et les apotomes, où ils ont les signes contraires...

Des exemples qu'il fournit, retenons pour sa simplicité :
$(a+1)^4=1a^4+4a^3+6a^2+4a^1+1a^0$ soit $(a+1)^4=a^4+4a^3+6a^2+4a+1$
(voir la ligne 4 du triangle arithmétique).
Remarque : les élèves du 1er cycle de notre enseignement secondaire sont toujours bloqués à la ligne 2 !
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

La formule du binôme de Newton donne immédiatement deux applications arithmétiques. En faisant a=b=1 on trouve que $\sum_{p=0}^{n} C_n^p = 1$ qui signifie que la somme des cellules d'une même base (pour parler comme Pascal) est la puissance de 2 dont l'exposant est le numéro de cette base. Par exemple : $1+4+6+4+1=16=2^4$ et en faisant a=-b=1 on trouve :

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p = 0$$

Exemple : 1-4+6-4+1=0

Abraham de Moivre, né en France en 1667 (2 ans après la publication du "triangle arithmétique") et émigré en Angleterre après la révocation de l'édit de Nantes (1685), a eu l'idée de faire a=cos x et b=i sin x dans la formule qui porte son nom : $\cos nx+i\sin nx=(\cos x+ i\sin x)^n$. ce qui permet de retrouver aisément toutes les atroces formules de trigonométrie qui encombrent les mémoires des potaches simplement en séparant les parties réelles et imaginaires!

AMUSONS-NOUS AVEC LE "TRIANGLE ARITHMETIQUE".

Dans une publication de l'IREM de Basse Normandie, Jacques Lecoq (1975) donne 2 pages d'exercices avec indications sur les solutions . Un exemple :

Prouver que $C_{2n}^n=\sum_{p=0}^{n} (C_n^p)^2$

(c'est-à-dire que la cellule du milieu de la ligne 2n est la somme des carrés de

" On peut tirer de là beaucoup d'autres proportions que je supprime, parce que chacun les peut facilement conclure, et que ceux qui voudront s'y attacher en trouveront peut-être de plus belles que celles que je pourrais donner. "

(Avertissement. cf anter.)

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
. . . .

Figure 11

(l'étoile de David)

toutes les cellules de la ligne n).

Autre exemple : montrer que si $1 \leqslant p \leqslant n-1$ alors $C^p_{2^n}$ est pair.

De même : si $0<p<n^k$ et **n est premier**, alors $C^p_{n^k}$ est multiple de n.
Et encore : si $1< p<n-1$ (n est naturel quelconque) montrer que C^p_n **ne peut pas** être une puissance d'un nombre premier.
Et aussi : si k est un naturel non nul alors à tout naturel $n \geqslant k$ on peut associer une SEULE suite strictement croissante de naturels a_i telle que

$$n = C^1_{a_1} + C^2_{a_2} + \cdots + C^k_{a_k}$$

(chercher dans le triangle pour des petites valeurs de n et de k et tenter la démonstration...)

A ce sujet Mr Roger Cuculière m'a communiqué un "défi mathématique" tel que s'en lançaient les contemporains de Pascal. Il est coté n°30 p. 586 des annales de l'académie des sciences de New York et porte le titre "L'identité de l'étoile de David" (voir le dessin ci-joint pour comprendre ce nom). On remarque que :

$$\binom{n}{r}\binom{n+1}{r+2}\binom{n+2}{r+1} = \binom{n}{r+1}\binom{n+1}{r}\binom{n+2}{r+2}$$

La preuve algébrique est triviale, par exemple en utilisant la formule:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

qui ne figure pas dans Pascal (mais est connue de son ami Fermat dès 1636) et que tous les bacheliers apprennent. L'auteur du défi, Michael Capobianco, offre 50 $ à la première démonstration combinatoire qu'il recevra. Avis aux amateurs !

Les problèmes combinatoires surgissent fréquemment dans les applications pratiques des mathématiques (jeux, graphes, informatique). On peut se reporter à Louis Comtet (Analyse combinatoire),PUF ou à H. J. Ryser (Mathématiques combinatoires) dans les monographies Dunod et de nombreux autres auteurs (voir l'article COMBINATOIRE de l'Encyclopaedia Universalis et sa bibliographie).

Citons par exemple du premier (page 13) le "problème des ménages". "Quel est le nombre de manières d'asseoir n ménages autour d'une table, les maris et épouses étant alternés et aucune épouse n'étant à côté de son mari ?" (Probléme posé et résolu par Lucas en 1891). On peut poser ce problème autrement : "Quelle est la probalité pour qu'en alternant un homme, une femme, choisis parmi ces n ménages, un mari, au moins, soit assis à côté de sa femme ?"

Un aperçu de l'importance des du triangle de Pascal dans la Théorie des nombres:

Si n est premier alors

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n-1}$$

sont divisibles par n (vérifier sur les lignes 2, 3, 5, 7 de la figure 2). Il est facile d'en déduire que $2^n \equiv 2 \pmod n$ si n est premier (ceci est un cas particulier du petit théorème de Fermat !)

Un autre exemple : considérons le polynôme

$$\frac{x(x-1)\ldots(x-p+1)}{p!}$$

que nous noterons C^p_x . C'est un polynôme de degré p.

Dans l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à p,
les (p+1) polynômes

$$C^0_x, C^1_x, \ldots, C^p_x$$

constituent une base. Ces polynômes (de base) ont ceci de remarquable qu'ils prennent une valeur entière pour chaque valeur entière de la variable. On peut décomposer un polynôme quelconque sur cette base et obtenir quelques jolis résultats d'Arithmétique.

Par exemple:

$$\exists \lambda_k \,/\, x^p = \sum_{k \leq p} \lambda_k C^k_x$$

et aussi

$$\exists \mu_k \,/\, \sum_{k=0}^{p} x^k = \sum_{k=0}^{p} \mu_k C^k_x$$

si on spécialise ces polynômes pour des valeurs entières x=n, on voit que :

$$n^p = \sum_{k=0}^{p} \lambda_k C^k_n \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{p} n^k = \sum_{k=0}^{p} \mu_k C^k_n$$

Ce qui permet de calculer les sommes de puissances d'un même nombre en utilisant le triangle arithmétique et aussi les sommes de carrés, de cubes, etc... de nombres successifs.

En effet, pour p donné, on a :

$$\sum_{m=0}^{n} m^p = \sum_{k=0}^{p} \lambda_k \sum_{m=0}^{n} C^k_m$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \lambda_k C^{k+1}_{n+1}$$

On peut aussi redémontrer le petit théorème de Fermat par cette méthode en considérant : $\frac{x^p}{p!} - \frac{x}{1!}$

Certains lecteurs, peu familiers avec les utilisations du triangle arithmétique, s'interrogent peut-être sur les notations de la page 1. Pourquoi P et F ?

Qu'ils pensent aux parties de Pile ou Face !
PFFFPPPF signifie "Pile-Face-Face-Face-Pile-Pile-Pile-Face" et toutes les parties en 8 coups contenant 4 fois face et 4 fois pile aboutissant en A. Combien y-a-t-il de telles parties ?

$\binom{8}{4} = 70$ Bien sûr !

On peut aussi chercher dans un ensemble à 8 éléments combien de parties à 4 éléments. Pour chaque élément a_n : F "j'accepte" ou bien P "je refuse" cet élément a_n, PFFFPPPF représente le choix de a_2, a_3, a_4, a_8 (et le refus de a_1, a_5, a_6, a_7). C'est une partie à 4 éléments. Combien y a-t-il de telles parties ?
$C_8^4 = 70$ Bien sûr ! La règle du jeu dans les 2 cas sus- mentionnés est la même que celle que j'ai donnée.

BIBLIOGRAPHIE

En plus de tous les livres mentionnés dans cet article, on peut prendre n'importe quel manuel de classe terminale (probabilité, combinatoire).

Voir aussi un excellent livre aux éditions CEDIC "L'enseignement des probabilités et de la statistique" d'Arthur Engel (en 2 tomes).

L'APMEP a publié en 2 tomes un "Pour apprendre à conjecturer" de Louis Guerber et Paul-Louis Hennequin qui comprend pas mal d'astuces d'analyse combinatoire et en montre l'intérêt pratique.

Nos illustrations sont tirées de l'Histoire universelle des chiffres de Georges Ifrah (Seghers) et de l'Histoire des mathématiques de Collette (Editions du Renouveau Pédagogique).

Les notes historiques sont extraites de Mathematical Carnival de M. Gardner (Vintage Books).

On peut,naturellement, aussi consulter les Oeuvres complètes de Pascal (La Pléiade), Huntley (déjà cité) et l'Histoire de la Science (La Pléiade).

Que les auteurs non cités ne s'offusquent pas. Le Nouvel Archimède n'est pas une encyclopédie.

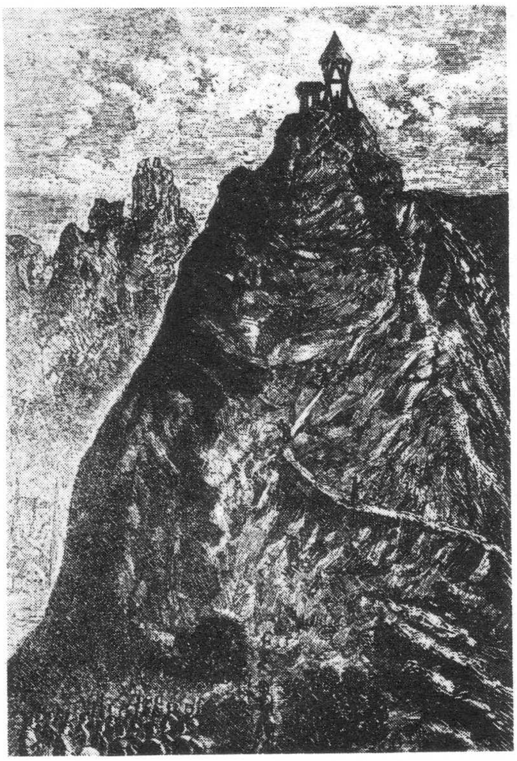
L'EXPERIENCE DU VIF ARGENT.

Pourquoi une statue de Pascal au pied de la tour Saint-Jacques à Paris? ... La suite vous le dira.

L'expérience dite " du vif argent" (lisez "mercure") est réalisée le Samedi 19 septembre 1648 par Florin Périer à la demande de son beau-frère Blaise Pascal.- Elle permet clairement, et pour la première fois, de préciser que l'air exerce bien une pression, et en fournit la mesure précise.Les conséquences pratiques de cette découverte, pour notre vie de tous les jours, sont considérables*.

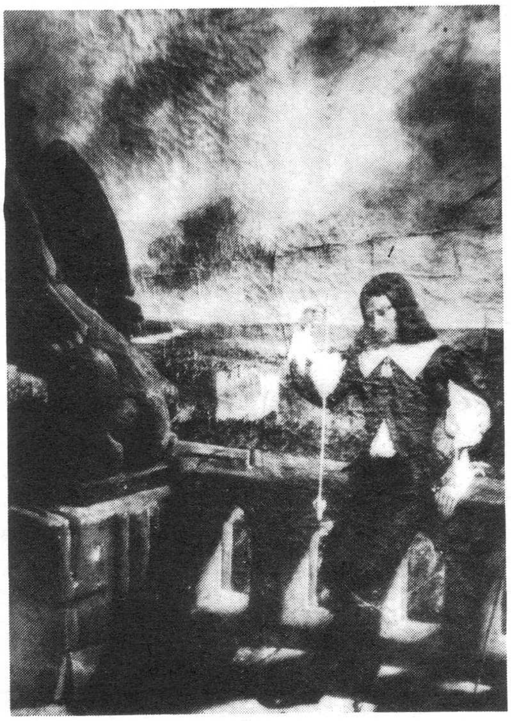
De quoi s'agit-il exactement? Elever de l'eau dans une canalisation au moyen d'une pompe et l'y garder peut paraître aisé. Au début de ce XVIIème siècle, le duc de Toscane avait commandé des pompes pour élever de l'eau; et ce à plus de treize mètres de hauteur. L'eau ne put atteindre cette hauteur. GALILEE fut consulté. Il trouva que l'eau n'atteignait en effet que 32 pieds (10,39m), constat qui avait été maintes fois fait avant lui. L'explication d'alors était que "la nature a horreur du vide" et que, en conséquence, si l'on fait le vide dans un tuyau plongé dans l'eau, celle-ci s'y précipite pour occuper le vide qui lui fait horreur. Galilée n'apporte pas de réponse à ce problème. TORRICELLI (ainsi que son condisciple VIVIANI) étudie ce phénomène en remplaçant l'eau par le mercure; il constate bien entendu que la hauteur de ce liquide n'atteint qu'une hauteur 13,6 fois plus faible. L'horreur du vide, ne pouvant être variable, ne permet pas d'interprêter cette expérience. Et Torricelli en conclut, sans aucune argumentation, que cette montée du mercure est due à la pression de l'air.

Au cours d'un voyage à Florence, le Père Mersenne a connaissance de ces faits et il en fait part dès son retour à Descartes, Roberval,...(comme on peut ici le constater, même avec les moyens que l'on peut juger rudimentaires de l'époque -absence de services postaux, de téléphone, de colloques,...et nombre très réduit de revues -l'information circule!). Pascal en sera donc informé et il tentera cette expérience avec d'autres liquides tels que le vin, ...Bien entendu il observe à chaque fois une hauteur limite. Réfutant cette "horreur du vide", il admet aussi que l'air exerce une pression et il tente de le PROUVER. En effet si ceci est vrai, cette pression doit diminuer avec l'altitude.



Vue du Puy-de-Dôme
à l'endroit où PASCAL
fit faire son expérience.

Et Pascal, qui habite alors Rouen, demande à son beau-frère F.Périer, de Clermont-Ferrand, de bien vouloir tenter cette expérience au Puy de Dôme. L'expérience, parfaitement conduite en présence de témoins, nous est longuement décrite dans la lettre que Périer adresse à Pascal le 22 septembre. Tout d'abord, dans le lieu le plus bas de la ville -le jardin des Pères Minimes- le mercure atteindra une hauteur de 26 pouces 3 lignes et demie (71,1 cm). En haut du Puy de Dôme, elle ne sera que de 23 pouces, 2 lignes (62,6 cm), c'est-à-dire 8,5 cm de moins. La même expérience sera refaite à mi-descente, "toujours avec le même tuyau,le même vif argent et le même vaisseau". Au retour à Clermont, Florin retrouve le R.P.Chastin, resté près du premier tube et qui confirme que le niveau n'a point bougé de la journée. L'hypothèse de Pascal est bien confirmée. Toujours avec la rigueur qui le caractérise et dont nous avons déja parlé dans cet article, Pascal est amené à induire que, pour une variation d'altitude de 20 toises, soit de 38,98 mètres, la différence de niveau du mercure sera de 2 lignes; soit de 4,5 mm. L'expérience le prouvera et sera refaite au pied de la tour Saint-Jacques. Ce qui explique qu'une statue de Pascal y sera placée.



Pascal à la Tour St Jacques
mesurant la pression atmosphérique.

Pascal est alors âgé de vingt-cinq ans. Ce sera son dernier travail scientifique. Il meurt quatorze ans plus tard en 1662.

* Le lecteur connaît certainement l'altimètre. Dans un autre domaine, lire "La météorologie au service des hommes", par Guy Larivière, dans la Revue du Palais de la Découverte de Mai 1984.

Texte réalisé par
J.C. Payen CNAM Paris
Y. Grimaldi, Y. Roussel Amiens.

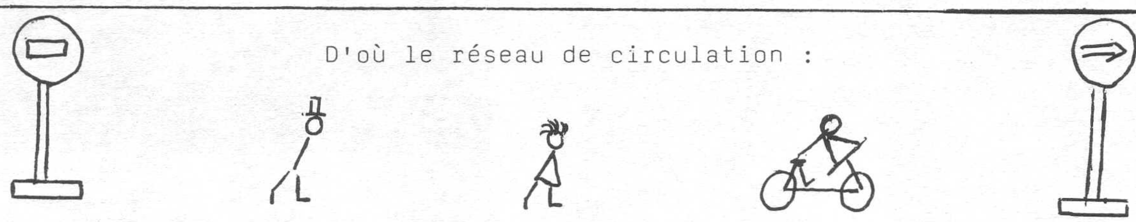
I.L.F. du P.A.

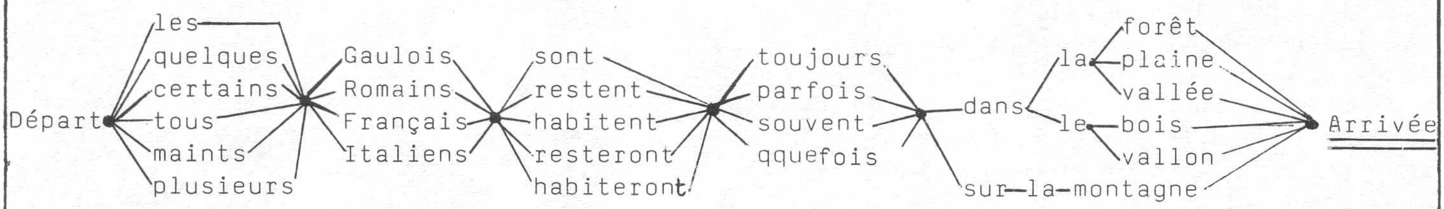
Circulez !

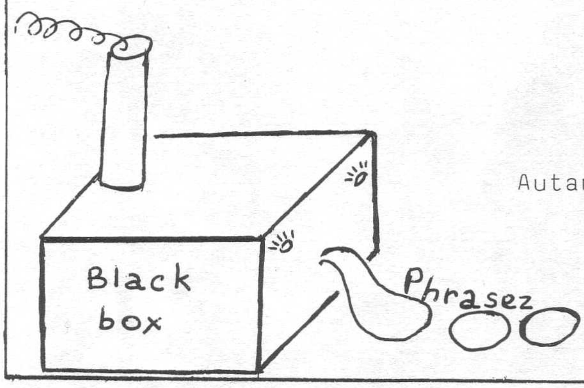
Les Gaulois. sont toujours dans la plaine !

Pourquoi les GAULOIS et pas les ROMAINS, les FRANCAIS ou les ITALIENS?... Pourquoi pas : QUELQUES, CERTAINS, TOUS, PLUSIEURS, MAINTS ?
Pourquoi DANS LA PLAINE et non DANS LE BOIS ou SUR LA MONTAGNE ?

D'où le réseau de circulation :



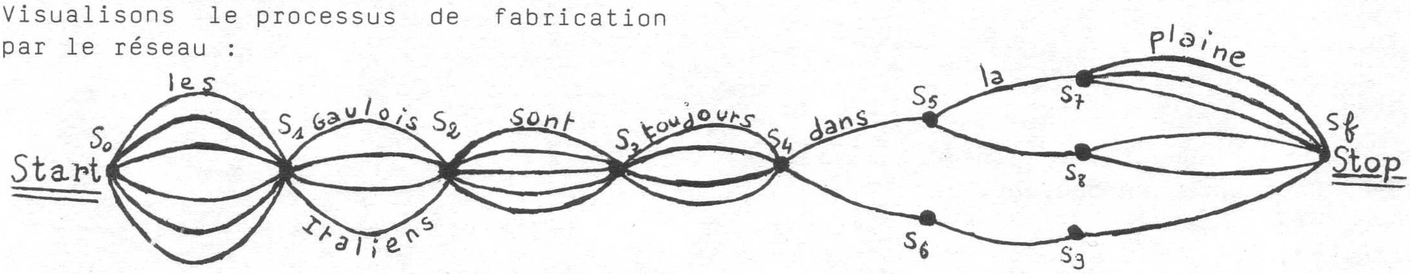




Autant de trajets, autant de phrases. Soit, ici :

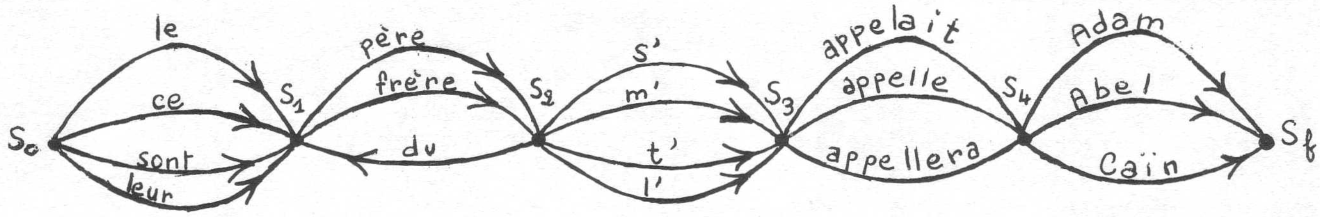
$$6 \times 4 \times 5 \times 4 \times (3+2+1) = 2880.$$

Et le grand linguiste américain, Noam Chomsky, de concevoir une sorte de machine, capable de fabriquer des phrases!
Sans trop se préoccuper de ce qu'il y a à l'intérieur, il n'est pas interdit de rêver qu'elle passe par une série d'états S_i en accouchant chaque fois d'un mot choisi dans une liste fournie à l'avance. Visualisons le processus de fabrication par le réseau :



Où chaque arc est porteur d'un mot.

En introduisant une boucle dans un tel réseau :



on peut obtenir, en n'usant que d'un nombre FINI d'états, des phrases aussi longues qu'on le désire :

LE PERE DU PERE DU PERE DU PERE DU PERE ... S'APPELAIT ADAM.

Là dessus, Noam se pose la question :
"Peut-on concevoir une machine fonctionnant selon ce principe, capable de produire toutes les phrases grammaticalement correctes d'une langue et rien que de celle-là ?"

Hélas la réponse fut : "No" ! *

Mais cet incident ne doit pas nous empêcher de jouer à imaginer des machines.

Dessinez-en une, la plus simple possible, capable de produire, entre autres, les cinq phrases :

LES PETITS FRANCAIS INTELLIGENTS LISENT LE P.A.
LES GRANDS ANES STUPIDES MEPRISENT LE P.A.
LES PARENTS INTELLIGENTS ACHETENT LE P. A.
LES ANES GOURMANDS BROUTENT DES CHARDONS.
LES PARENTS MYOPES PORTENT DES LUNETTES.

Attention aux petits ennuis (à suivre).

*Si vous voulez en savoir plus, lisez N. Chomsky, STRUCTURES SYNTAXIQUES, - 1957, trad. française 1969. Ed. Seuil.

De combien de façons

peut-on dire :

"Loin de diminuer, la détention des prisonniers d'opinion s'accroît de façon alarmante." ?

Combien pariez-vous ?

Pour fixer les idées, voici une paraphrase qui veut dire sensiblement la même chose :

"Le nombre de personnes incarcérées uniquement pour leurs idées religieuses ou politiques, au lieu d'être à la baisse, augmente toujours tout en semant l'inquiétude chez beaucoup de gens."

Inspirons-nous des réseaux de circulation ci-dessus. Sans trop déformer le sens, à la place de LOIN DE, on peut se servir d'expressions telles que :

AU LIEU DE, AU CONTRAIRE, NE...NULLEMENT, NE... AUCUNEMENT, PAS DU TOUT...

A la place de DIMINUER :

ETRE A LA BAISSE, PERDRE DE L'IMPORTANCE, PERDRE DU TERRAIN, DEVENIR MOINDRE, DEVENIR MOINS IMPORTANT, TOMBER...

De même, au lieu D'OPINION, on peut noter DE CONSCIENCE, voire POLITIQUE et, au lieu de PRISONNIER, PERSONNE ou INDIVIDU, INCARCERE, EMPRISONNE ou DETENU...

Ensuite :

SEULEMENT, UNIQUEMENT ou EXCLUSIVEMENT...

POUR DELITS D'OPINION, LEURS OPINIONS, LEURS IDEES, LEURS CONVICTIONS, LEUR AVIS, qui peut être POLITIQUE ou RELIGIEUX...

Ceci dit, LE NOMBRE S'ACCROIT, CROIT, AUGMENTE, GAGNE DU TERRAIN, EST EN HAUSSE, GRIMPE ; TOUJOURS, CONSTAMMENT ou SANS CESSE, DE FACON ALARMANTE, TROUBLANTE ou INQUIETANTE ou encore CE QUI VA ETONNER, TROUBLER, INQUIETER, REMUER L'INQUIETUDE, TRACASSER etc...

Bref, en faisant le produit, Mel'čuk trouve 18280080 façons différentes de le dire et il est certainement en dessous de la vérité.

Quant à vous, vous avez certainement perdu votre pari.

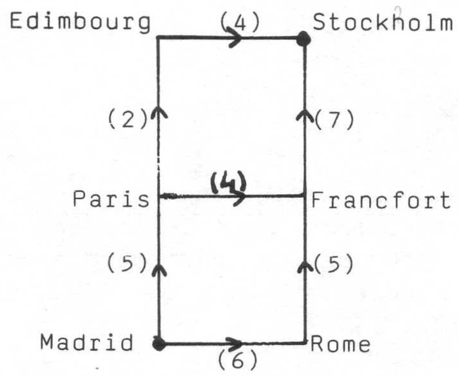
Informatique

Cette rubrique nouvelle de notre revue se propose de traiter de l'Informatique ou/et de ses applications. Ainsi nous vous présenterons au fil des numéros, par exemple, tel langage dans le contexte historique de sa création, tel concept (le premier compilateur FORTRAN de Bacchus en 1956, ou ...) voire une application. C'est ce dernier choix que nous vous proposons aujourd'hui.

Ford-Fulkerson

Lorsqu'une compagnie aérienne a des places qui restent vacantes sur un vol régulier, il n'est pas rare qu'elle les propose à des agences de voyage à des tarifs réduits.

Imaginons par exemple une agence madrilène qui utilise cette possibilité pour organiser des voyages vers Stockholm. Supposons que le réseau aérien soit celui de la Fig. 1, sur laquelle on lit le sens des vols et le nombre de sièges qui y sont disponibles. Considérons de plus qu'il n'y a pas d'autres contraintes, et notamment que le prix des places est identique pour tous les vols.

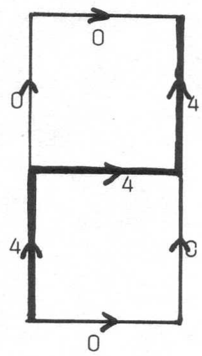


Le nombre de sièges disponibles.

Fig : 1

Demandons-nous alors combien de places pour Stockholm l'agence peut proposer à sa clientèle.

Si vous êtes responsable de cette agence, et si vous voulez procéder méthodiquement, vous pourrez augmenter progressivement le nombre de passagers comme l'indiquent les figures 2, 3 et 4.

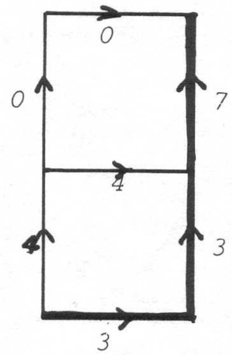


Valeur du flot = 4

Fig. 2

Bien remarquer la différence entre les <u>nombres effectifs</u> de passagers (par exemple sur la Fig. 4) et les <u>capacités</u> en sièges que l'on voit sur la Fig. 1. Ces derniers figurent <u>entre parenthèses</u> dans tout l'article.

Peut-on faire passer plus de 8 passagers à travers ce réseau aérien ?

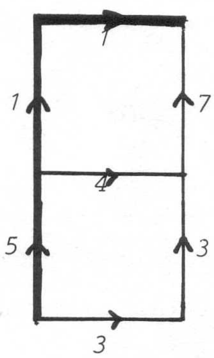


Valeur du flot = 7

Fig. 3

Peut-on envisager de transporter ne serait-ce qu'un passager de plus ?

La réponse n'est pas évidente. Et pourtant, oui, c'est possible ; on peut faire transiter une neuvième personne à travers le réseau. Voyons de quelle manière.



Valeur du flot = 8

Fig. 4

D'abord, au départ de Madrid, ce neuvième passager doit être aiguillé sur Rome, et non sur Paris, car la ligne Madrid-Paris est saturée (5(5)). Une fois à Rome, il peut embarquer sans problème pour Francfort. Mais arrivé là-bas, le voilà coincé ! En effet, le seul vol au départ de Francfort est saturé : 7 passagers pour

7 sièges...

Alors, que faire en tant qu'organisateur de ces voyages ?

Tenons le raisonnement suivant : il faudrait qu'une place se libère sur le vol Francfort-Stockholm ; pour cela, il suffirait qu'il y ait un client de moins sur Paris-Francfort. Eh bien qu'à cela ne tienne : retirons un des quatre passagers de ce vol et envoyons-le sur Edimbourg, puis, de là, à Stockholm, aucune de ces deux liaisons n'étant saturée. Et voilà, le tour est joué...

Si nous notons conventionnellement par des +1 et -1, les différents mouvements effectués, nous avons la Fig. 5, qu'il suffit d'"ajouter" à la Fig. 4 pour obtenir le flot de la Fig. 6. On peut montrer qu'il est impossible d'avoir un flot plus volumineux (on dit que l'on a alors atteint un flot maximal). Nous préférons en reporter la preuve (facile) à la fin de l'article, à un moment où nous disposerons d'un résultat général.

Essayons maintenant de dégager une véritable méthode de recherche d'un flot maximal. Pour cela, aidons-nous à nouveau d'un exemple. Celui du réseau de la Fig. 7. Les conventions y sont les mêmes que précédemment.

Plaçons-nous en cours de traitement : supposons qu'après un certain nombre d'étapes, on en soit arrivé au flot de la Fig. 8. Est-il possible de l'améliorer, c'est-à-dire de faire circuler davantage de monde dans ce réseau ?

Pour cela, reprenons la technique du ou des passagers que l'on ajoute et/ou que l'on retire en la présentant sous une forme plus "automatisable".

Ce processus de transfert de passagers, on l'a vu, se traduit par un chemin avec des +1 et -1 reliant le point de départ au point d'arrivée.

Quelles sont les règles à suivre pour construire un tel chemin ?

D'abord on doit utiliser +1 si l'on progresse dans le sens de l'arc, et -1 sinon. Mais ce n'est pas tout.

Il faut prendre garde de ne pas utiliser +1 (c'est-à-dire ajouter un voyageur) le long d'un arc déjà saturé ; ni -1 le long d'un arc vide de passagers. Par contre, on peut aussi bien utiliser +1 que -1 lorsque l'arc n'est ni saturé ni vide.

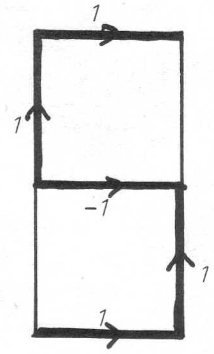


Fig. 5

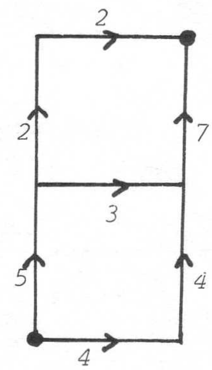


Fig. 6

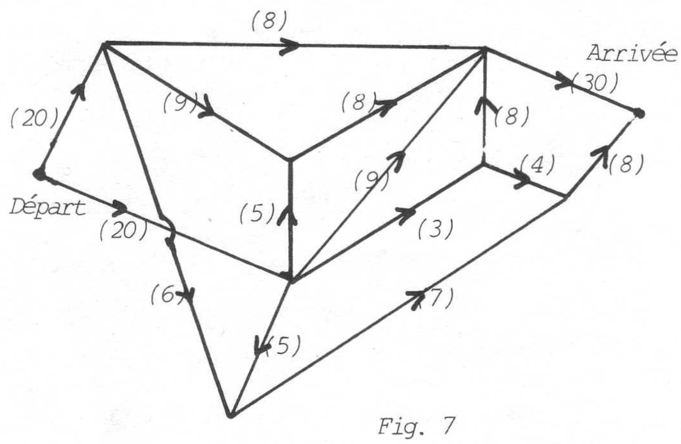


Fig. 7

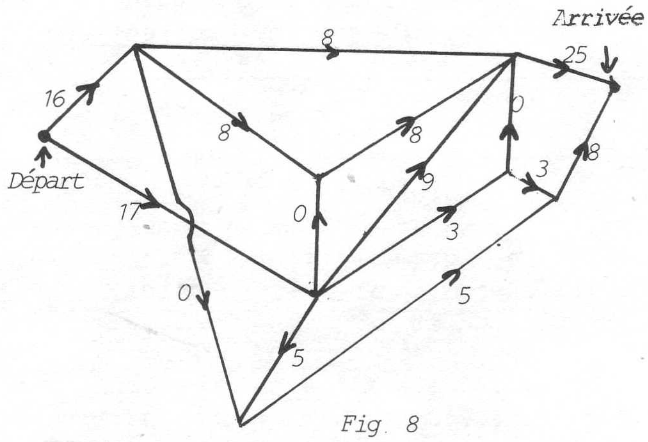


Fig. 8

Nous allons matérialiser ces contraintes sous la forme d'un autre graphe (voir Fig. 9) déduit du graphe de la Fig. 8 de la façon suivante :

- si un arc est saturé, on renverse le sens de la flèche.
- si un arc est vide de passagers, on conserve au contraire le sens de la flèche.
- et dans les autres cas, on permet d'ajouter ou de retrancher, ce qui se traduit par une double flèche permettant aussi bien l'aller que le retour.

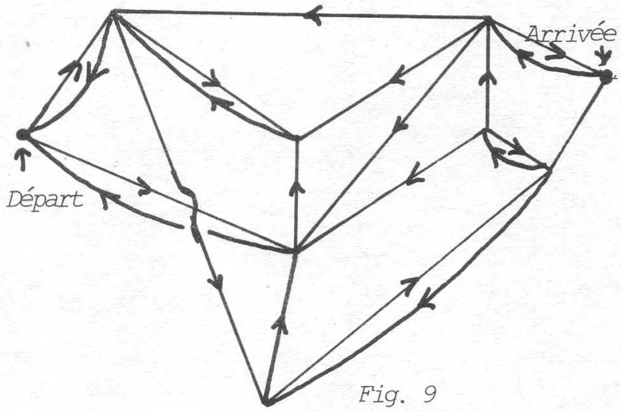


Fig. 9

Maintenant, il ne nous reste plus qu'à confier la Fig. 10 à un enfant de 5 ans en lui demandant de rechercher un chemin qui conduise du point de départ au point d'arrivée, en tenant compte, bien sûr, de l'orientation des flèches. Il trouvera sans grande difficulté le cheminement de la Fig. 11.

(Rappelons que les signes + et - sont attribués suivant que l'on parcourt l'arc dans son orientation initiale ou transformée).

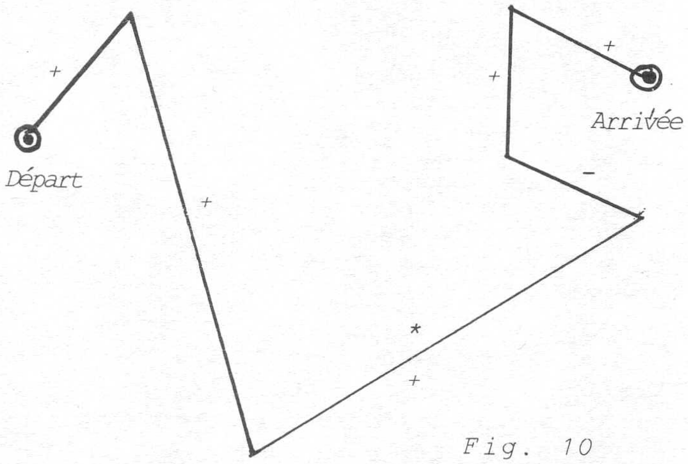


Fig. 10

Le long de ce chemin, nous allons pouvoir faire circuler deux passagers supplémentaires. Pourquoi deux ? Parce qu'un seul ne fait toucher ni le "plafond" ni le "plancher" sur aucun des arcs, alors qu'un deuxième est le maximum que puisse tolérer l'arc signalé par une *, qui se sature en passant de 5 à 7 .

D'où le flot de la Fig. 11 dont la valeur est
18 + 17= 27 + 8 =35

Nous n'allons pas être en mesure de faire mieux. Expliquons pourquoi.

Imaginons une personne de plus, issue du point de départ.

Appelons E l'ensemble des villes qu'elle peut atteindre (en empruntant des arcs non saturés) et F l'ensemble des villes qu'elle ne peut pas atteindre.

Le résultat fondamental est le suivant : <u>tous les arcs qui sortent de E pour rentrer dans F sont saturés</u>.

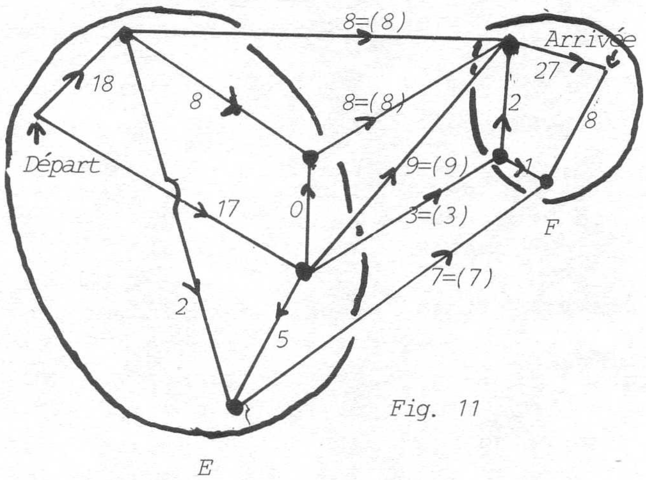


Fig. 11

En effet, si ce n'était pas le cas, c'est-à-dire s'il existait au moins un arc non saturé joignant E à F, notre personne supplémentaire s'empresserait d'emprunter cet arc et atteindrait ainsi une ville de F, ce qui est absurde, vu la définition de F.

Pour revenir à notre exemple : le point d'arrivée ne faisant pas partie de l'ensemble E des villes qu'une personne supplémentaire peut atteindre à partir du point de départ, notre flot ne peut donc plus être augmenté.

A ce stade, il est indispensable d'introduire une définition.

On dit que deux ensembles complémentaires A et B définissent une <u>coupure</u> lorsque l'un contient le point de départ et l'autre le point d'arrivée des passagers. On appelle alors <u>valeur</u> de cette coupure la somme des nombres ( ) + ( ) + ... portés par les arcs qui sortent de A pour rentrer dans B. Voir Fig. 12.

Il y a maintenant une remarque à faire. Si un flot de passagers existe entre le point de départ et le point d'arrivée, chaque voyageur empruntant un arc-passerelle et un seul pour transiter de A vers B, il suffira de recenser la somme des nombres portés par les arcs pour avoir le nombre de voyageurs du flot.

Cette remarque vaut pour n'importe quel flot et n'importe quelle coupure. Vues les inégalités qui existent entre les nombres de passagers (pas de parenthèses) et les nombres de sièges (avec des parenthèses), on peut énoncer que

la valeur de n'importe quel flot	$\leqslant$	la valeur de n'importe quelle coupure

Or on a vu, avec les ensembles E et F, que l'on pouvait avoir l'égalité. Dans ce cas, on a donc d'un côté un flot maximal, et de l'autre une coupure de valeur minimale. C'est le théorème de <u>Ford-Fulkerson</u>, que les anglo-saxons résument de la façon suivante :

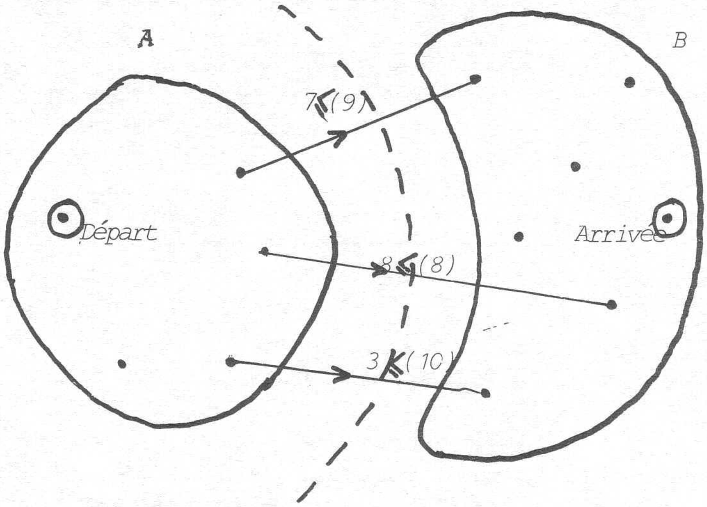
$\boxed{\text{max flow= min cut}}$

(flot maximal = coupure minimale)

Ce résultat conduit à un critère qui peut être très utile : si l'on a construit un certain flot et que l'on trouve une coupure de même valeur que ce flot, on peut en déduire que ce flot est maximal.

C'est le moment de revenir au premier exemple pour illustrer ceci. Nous avons représenté trois coupures sur la Fig. 13 ; la plus petite a pour valeur 9, c'est-à-dire précisément la valeur trouvée pour le flot de la Fig. 6, ce qui prouve bien que ce flot est maximal.

Que conclure ? Que nous avons à notre disposition des résultats et des méthodes qui peuvent conduire à une programmation assez simple sur ordinateur, dans la mesure où le seul point délicat se ramène à la recherche d'un chemin dans un graphe tel que celui de la Fig. 9 ; et il existe pour cela un algorithme classique dit "de parcours en profondeur". Ce sera d'ailleurs l'objet d'un prochain article...



Exemple d'une coupure de valeur :
(9)+(8)+(10)=(27) *Fig. 12*
et d'un flot de valeur 7+8+3=18

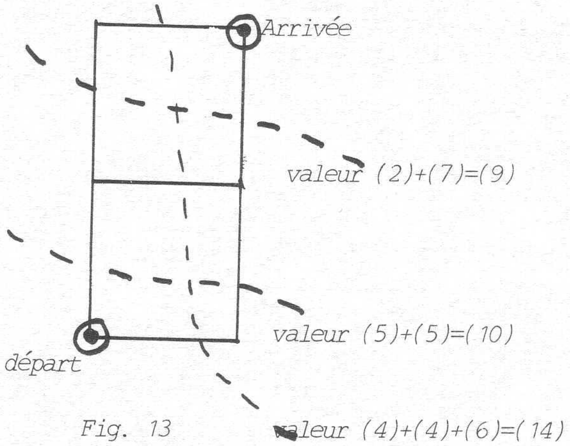
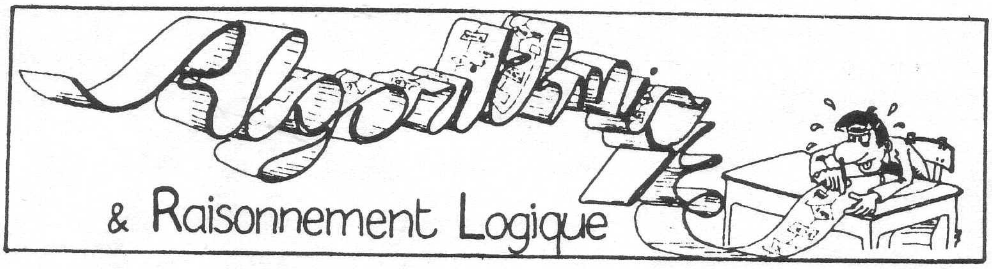


Fig. 13

Amis lecteurs, n'hésitez pas à écrire au journal pour faire part de vos commentaires, désirs etc... concernant cette rubrique.



Pour la naissance du "Nouvel Archimède", l'ex-rubrique ARL entendait, elle aussi, se refaire une santé. Ainsi, comme l'indique son nouveau titre, la solution des problèmes posés fera plus souvent appel à l'informatique, et nous n'hésiterons donc pas à publier quelques listings de programme, en particulier en BASIC. Nous pensons répondre de la sorte à cet engouement pour la "micro" que nous avions ressenti dans vos lettres. Pour ce premier numéro, nous ne publions pas de programme, mais remarquez que les 2 problèmes posés se satisferaient bien de l'aide d'un petit ordinateur...

Quant au fonctionnement de la rubrique, rien ne change. Dans chaque numéro vous trouverez toujours un, deux ou trois problèmes, ainsi que les solutions avec un décalage de 2 numéros. C'est ainsi que les solutions aux problèmes de ce numéro 1 paraîtront dans le numéro 3. Ce délai vous laisse tout le temps nécessaire pour réfléchir et (important !) nous envoyer vos solutions.

Mais nous attendons aussi de vous, chers lecteurs, des énoncés de problèmes algorithmiques ou informatiques.

Tout courrier concernant cette rubrique est à expédier à :

Christian BOYER
Le Nouvel Archimède AMI
BP 0222
80002 AMIENS CEDEX

A vos stylos et à vos micros !

Problèmes

AMI 1-1 - Test de primalité

Soit la suite définie par :

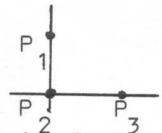
$A(1)=0$
$A(2)=2$
$A(3)=3$
$A(i+3)=A(i)+A(i+1)$

Peut-on affirmer :

$\boxed{n \text{ premier} \Longleftrightarrow n \text{ divise } A(n)}$

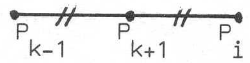
AMI 2-1 Construction de points (proposé par Jean Brette) :

Dessinons dans le plan, trois points

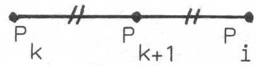


Les lois de tracé de P_i, pour $i \geqslant 4$, sont :

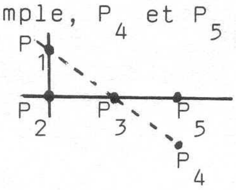
-si $i=2k=(k+1)+(k-1)$, alors P_i se positionne dans l'alignement de P_{k+1} et P_{k-1} de la manière suivante :



-si $i=2k+1=(k+1)+k$, alors P_i se positionne dans l'alignement de P_{k+1} et P_k de la manière suivante :



Par exemple, P_4 et P_5 sont ainsi positionnés :



Que peut-on dire de P_{25} ?

Solutions

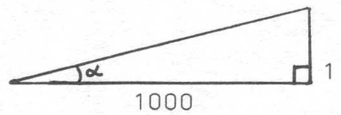
Solution d'ARL-97 -Précision Militaire-

Rappelons l'énoncé du problème :

> L'unité d'angle utilisée par les militaires (principalement pour le tir) n'est ni le degré, ni le grade, ni le radian, mais le millième.
>
> Voici sa définition : le millième est l'angle sous lequel on voit un piquet vertical de un mètre situé à une distance de un kilomètre.
>
> Maintenant observez une boussole militaire. Et qu'y voyez-vous ? Elle est graduée en exactement 6400 millièmes.
>
> Que pensez-vous de cette unité d'angle ?

De Jacques Noël, de Mantes, nous recevons les remarques suivantes :

"Si l'on considère que l'angle α de la définition peut se schématiser ainsi :



alors $\alpha = \text{Arctg } 1/1000 \simeq 1/1000$rd.

Donc un tour complet représenterait $2\pi/\alpha \simeq 2000\,\pi$.

Ou alors π vaut 3,2 pour les militaires (!), ou alors la boussole devrait avoir 6283,18... graduations.

Mais si l'on prend comme définition du millième le 1/6400 d'un tour, le piquet ne devrait plus faire 1 mètre mais 98,17... centimètres. A moins que le piquet de 1 mètre soit vu, non plus à 1 km mais à 1,018... km !!"

Monsieur Auzias, de Pierrelatte, nous a extrait du manuel "Instruction sur le tir d'artillerie" (Imprimerie Nationale, Paris, 1917) l'étonnant passage suivant montrant l'existence de trois sortes de millième :

"Le millième ordinaire s'obtient en divisant la circonférence en 6400 parties égales ; c'est un seizième de grade. Le millième R s'obtient en divisant la circonférence en 6000 parties égales ; c'est un quinzième de grade. Enfin dans certains cas, en particulier pour les tables de tir des fusils et des mitrailleuses, les angles sont mesurés en 1/1000 de tangente, c'est à dire par le produit par 1000 de la tangente trigonométrique de l'angle."

Et notre lecteur poursuit en nous faisant part d'une note de ce même manuel compliquant encore les choses :

"Dans les tables de tir allemandes et russes (donc à l'époque tsariste), on touve une autre valeur du millième, c'est le seizième de degré : il y en a 5760 au tour d'horizon... "

Mais Mlle Sophie Bouvier, de Paris, nous rappelle plus poétiquement que :

"La rose des vents possède 16, 32, ou 64 divisions. Le millième y est donc particulièrement adapté : 400 millièmes représentent par exemple l'écart entre le Nord et le Nord-Nord-Est."

COMPLEMENTS D'ARL 91-1 Un 421 bien particulier.

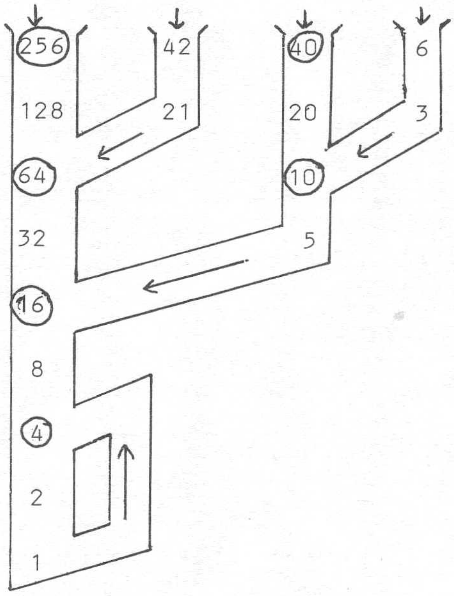
Rappel du problème :

$$\forall \mu_0 \in \mathbb{N} \quad \text{on pose } \mu_{n+1} = \begin{cases} 3\mu_n + 1 & \text{si } \mu_n \text{ impair} \\ \mu_n/2 & \text{si } \mu_n \text{ pair} \end{cases}$$

Alors à partir d'un certain rang N, on trouve la périodicité $\mu_N=4$, $\mu_{N+1}=2$, $\mu_{N+2}=1$, $\mu_{N+3}=4$, $\mu_{N+4}=2$, $\mu_{N+5}=1$, etc...

Pourquoi ?

M. Duval, de Toulouse, nous fait remarquer que si l' énoncé est vrai, alors $\forall \mu_c$ il existe un i tel que $\mu_i=256$ ou 42 ou 40 ou 6. Et alors N=i+6. Cela peut se schématiser ainsi :



Bien sûr son affirmation a 13 exceptions : les nombres des niveaux inférieurs à 256-42-40-6.

Il poursuit en indiquant qu'en continuant indéfiniment à construire cet arbre, TOUTES les jonctions (dans notre figure, ce sont les nombres encerclés) sont de la forme 2x(3k+2).

Savez-vous, vous aussi, faire cette simple démonstration ?

Dans PA 97, j'examinais les suites pour tous les μ_0 jusqu'à 100000. Je définissais la distance d comme le plus petit entier tel que $\mu_d=1$ (soit d =N+2 par rapport à la définition du problème).

Pour tous les $\mu_0 \leqslant 100000$, on pouvait observer que :

$d<35 \text{ Log } \mu_0$ (1)

Etait-ce encore vrai pour des μ_0 supérieurs ? En élaborant un programme plus puissant en Assembleur Z80, hélas trop long pour être publié ici, j'ai pu calculer les d pour les $\mu_0 < 2^{26} = 67\ 108\ 864$.

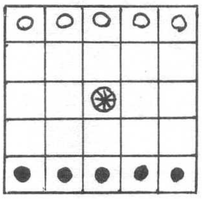
Le plus petit μ_0 pour lequel l'inégalité (1) a été prise en défaut est 230 631 avec $d=442 \simeq 35{,}8 \text{ Log } \mu_0$.

La distance maximale observée est 949 pour $\mu_0=63\ 728\ 127$. Qui ira plus loin?

Les jeux du nouvel Archimède

Le jeu présenté n'est pas une nouveauté puisqu'il est apparu en 1979 dans le n°73 de la revue anglaise, aujourd'hui disparue, Games and Puzzles. Cette création de Robert A. Kraus n'a pas eu la publicité méritée ; qui, à part quelques fanatiques des jeux, connaît et pratique le Neutron ? Il faut réparer cette injustice... avec le sourire.

Matériel :



-un damier 5x5

-5 pions blancs ○
5 pions noirs ●
1 neutron ⊛

But du jeu : Faire parvenir le neutron sur sa propre ligne de départ ou bloquer le neutron.

Marche du jeu : Blanc commence en jouant une de ses pièces.
Ensuite, alternativement, chaque joueur joue d'abord le neutron puis une de ses pièces.

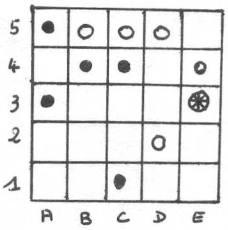
Un mouvement de pièce ou de neutron se fait dans une des huit directions jusqu'à un obstacle qui stoppe la pièce (bord ou autre pièce) le mouvement dans une direction donnée doit être maximum c'est-à-dire accompli jusqu'à un obstacle.

Gain : -Le premier qui parvient à placer le neutron sur SA ligne de départ.
-Lorsqu'un joueur est obligé de déplacer le neutron sur une case de la ligne adverse, il perd.
-Lorsqu'un joueur est bloqué (il ne peut pas déplacer le neutron) il a perdu.

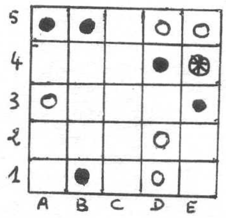
Temps de jeu moyen : 15 mm.

Commentaires : On se prend assez vite à ce jeu original. C'est en quelque sorte une "Partie de rugby à l'envers" dans laquelle il faut bien coordonner une attaque d'équipe sans laisser se créer un "trou" fatal ni abandonner le neutron dans la mêlée !

Exemples de fin de partie :



Les blancs doivent jouer ; ils perdent au coup prochain ! (analysez !)

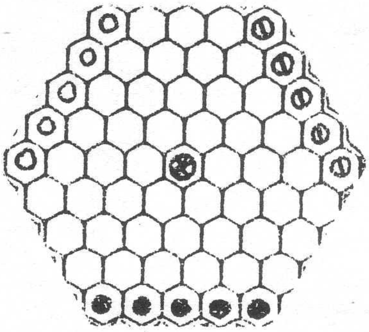


Blanc joue : Neutron en C2 (forcé), puis A3 en C1 (forcé sinon Noir gagne au coup prochain), Noir joue : Neutron en E4 puis B1 en D3, Blanc perd par étouffement

Variantes : On peut jouer au neutron sur un autre terrain, les règles restant identiques. Sur un terrain hexagonal (voir figure) une pièce peut se déplacer dans six directions.

Le jeu peut se jouer à deux, auquel cas les adversaires placent leurs pions face à face. Mais on peut concevoir, comme l'a fait une équipe de l'IREM de Besançon, un jeu à trois :

Jeu à trois : Règles identiques à celle du jeu à deux avec en plus :
-interdiction, lorsque c'est possible, de laisser une position gagnante au joueur suivant ! (ceci pour éviter les alliances, bien sûr, mais cette règle entraîne des analyses "rétrogrades" du genre "Est-ce bien sûr que tu ne pouvais rien faire d'autre ? ").
-est gagnant celui qui voit arriver le neutron sur sa ligne de départ.



Position de départ du Neutron (jeu à trois)

La rubrique "Les jeux du Nouvel Archimède" essaie de vulgariser un certain nombre de jeux de réflexion (elle prend le relais de P.A. Jeux du Petit Archimède). Certains seront peu connus, voire inédits... et pourquoi pas vos inventions ?

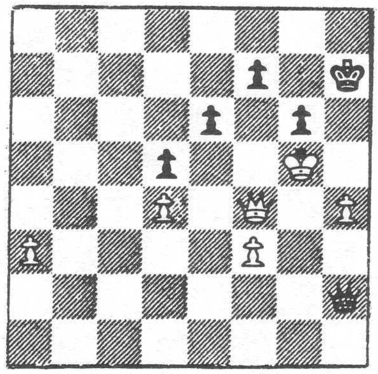
Pour toutes remarques concernant cette rubrique veuillez écrire à :

Francis Gutmacher
33 rue des Prairies
75020 PARIS

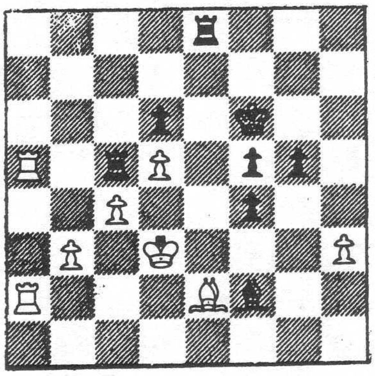
Echecs

Testez votre force

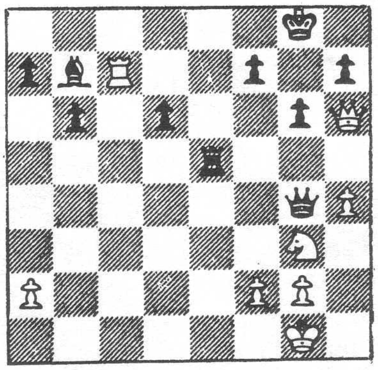
Voici aujourd'hui six petits problèmes. Les noirs jouent et gagnent dans chacune de ces positions. Et vous trouverez les solutions dans ce numéro.



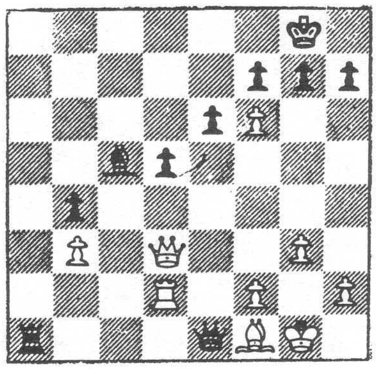
Problème A:



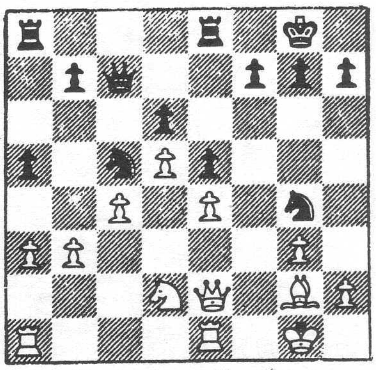
Problème B :



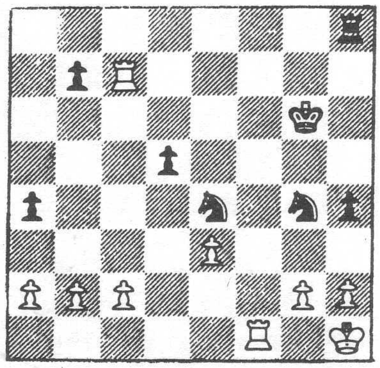
Problème C :



Problème D :



Problème E :



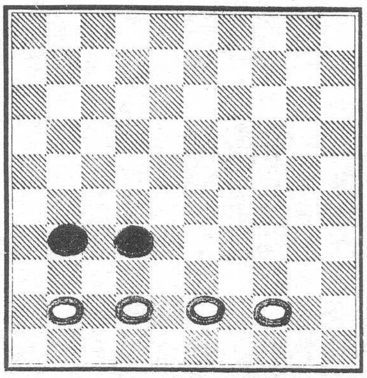
Problème F :

Dames

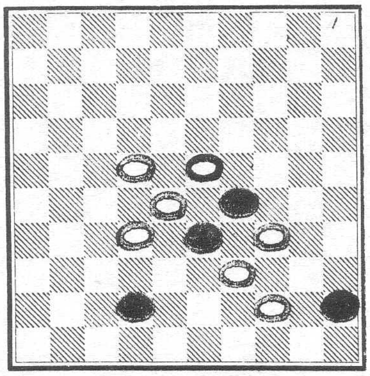
Tout s'électronise... même les jeux les plus classiques, que ce soit le bridge, les échecs, ou les dames.

Mettre le jeu de dames sur ordinateur, voilà qui semble facile : un jeu d'enfants, n'est-ce pas ? Ce serait oublier que ce jeu, dont les règles sont effectivement très simples, parvient en réalité à un degré de complexité très important, et plusieurs équipes n'ont réalisé que des programmes ne donnant pas toute satisfaction. C'est pourquoi une seule machine, le Dame-Sensory-Challenger est actuellement commercialisée, six autres programmes restant encore au stade de l'expérimentation. Il y a 3 ans, j'avais été l'un des tout premiers damistes à tester cet appareil. Disons tout de suite que c'est un excellent "compagnon" pour apprendre à jouer lorsque l'on débute ou lorsqu'on possède un niveau moyen : en force 6, il peut être comparé à un bon joueur régional, mais se trouve ridiculisé par les maîtres nationaux : de grosses faiblesses positionnelles, et surtout une totale incapacité à jouer les fins de parties dès que des dames entrent en jeu. Par contre, j'ai été stupéfait par ses performances tactiques, notamment en ce qui concerne la résolution des problèmes : il suffit de ne pas lui présenter un problème dont la solution comporte plus de 7 ou 8 temps et il trouve assez rapidement la solution.

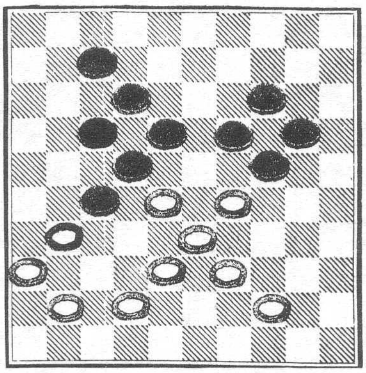
Les 4 problèmes présentés ci-après ont tous été résolus en moins de 3 minutes chacun par le Dame-Sensory-Challenger. Faites l'expérience : installez la position sur un damier, cherchez la solution, et comparez votre temps de réflexion...



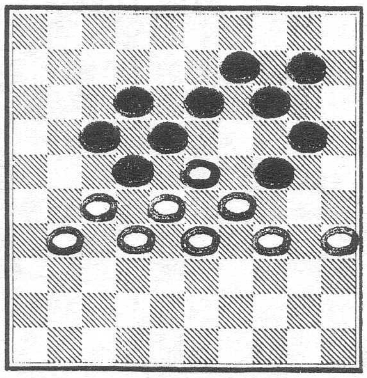
Problème A (pour débutants) : Les Blancs jouent et gagnent en trois temps : 43-39 ! (31-36 forcé) 42-38 (32x34) 41-37 B +



Problème B : Les Blancs jouent et gagnent en trois temps : 44-40 (29x38) 34-29 (45x32) 39x48 B +



Problème C : Les Blancs jouent et gagnent en six temps : 38-32 (27x47) 28-23 (19x28) 31-27 (22x31) 33x2 (24x33) 36x27 (47x22) 39x8 B +

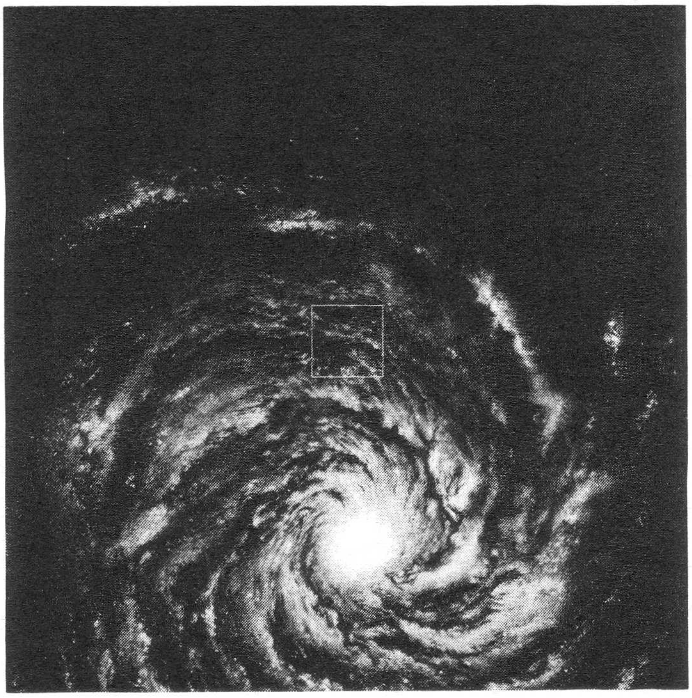


Problème D : Les Blancs jouent et gagnent en six temps : 35-30 (24x35) 34-30 (35x24) 23-19 (14x34) 27-21 (17x37) 28x17x8x19x30x39 37x28) 33x24 B +

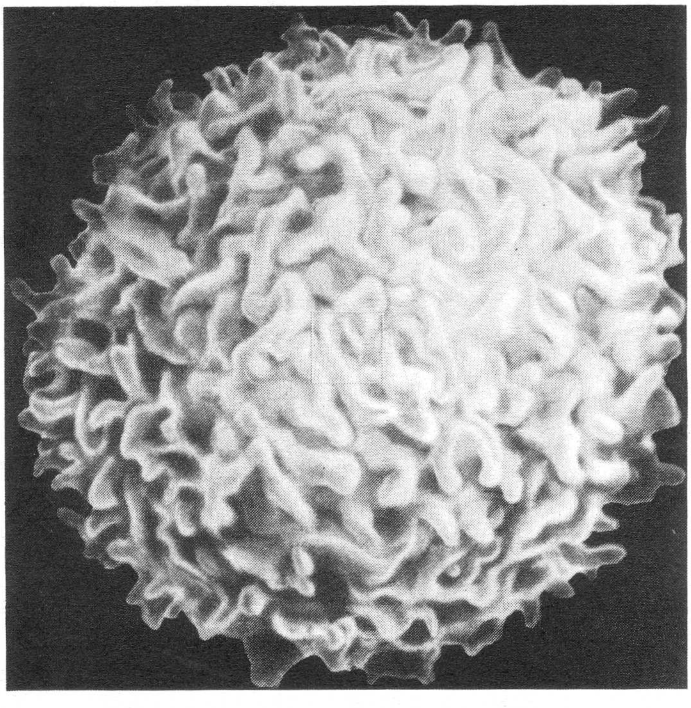
Notes de lecture

LES PUISSANCES DE DIX, de Philipe Morrison, Editions Belin, Collection l'Univers des Sciences.

Cet ouvrage procède d'une idée simple, simple comme toutes les bonnes idées : que se passe-t-il lorsque l'on ajoute un zéro ? C'est-à-dire, lorsque l'on agrandit dix fois, puis dix foix, et ainsi de suite. Partant de cette idée, l'ouvrage se construit sur une suite de quarante-deux photographies carrées, chacune d'elles représentant le carré central de la précédente, agrandi dix fois. Tout commence dans la nuit étoilée, car la première photo embrasse un carré d'un milliard d'années lumière de côté, soit 10^{25} mètres (à peu près...). On ne voit que quelques poussières lumineuses, chacune étant une lointaine galaxie. La nôtre est au centre, trop éloignée pour être visible. Puis la caméra avance en un zoom fantastique et bientôt apparaît une galaxie en spirale : la nôtre. Elle crève l'écran lorsque le côté de la photo carrée mesure cent mille années lumière (seulement !). Et le voyage continue. Le Soleil apparaît, puis la Terre. Les échelles deviennent alors plus humaines : on observe des photographies aériennes successives de la région de Chicago, puis de la ville, puis d'un quartier. Lorsque le carré mesure un mètre de côté, nous voyons un homme qui fait la sieste dans un jardin public. Au centre de la photo, sa main. Et la photo d'après, contrairement aux précédentes, est AGRANDIE par rapport à l'objet : elle représente un carré de 10 cm de côté occupé par le dos de la main de l'homme. Et le voyage continue dans l'infime comme il avait débuté dans l'immense. "Nous pénétrons dans un monde inférieur, aussi inconnu que celui des lointaines étoiles". Le même carré qui accueillait tout à l'heure la Galaxie est tout entier occupé par une cellule sanguine : 10 microns de côté. Puis nous voyons les échafaudages moléculaires qui constituent la matière vivante, puis les atomes, puis un noyau de carbone et tout s'achève sur un femtomètre carré, 10^{-15} mètres de côté, avec un motif de taches colorées représentant le symbole abstrait d'une physique encore en grande partie inconnue.



10^{21} mètres .La Voie lactée



10^{-5} mètres: un lymphocyte

En feuilletant ces images, où notre dormeur du pré joue les intermédiaires entre deux gouffres, on évoque irrésistiblement Pascal : "car enfin, qu'est-ce que l'homme dans la nature ? Un néant à l'égard de l'infini, un tout à l'égard du néant, un milieu entre rien et tout." Mais alors que Pascal nous défiait de comprendre ces deux infinis, ce livre nous apporte des clés. Il est présenté de façon très rigoureuse : les photos dont nous avons parlé se succèdent sur les pages de droite, les pages de gauche étant consacrées à des commentaires et des compléments sur les divers objets dont l'échelle est comparable à celle de la photo de droite. Une introduction générale de 15 pages présente diverses connaissances scientifiques utilisées dans la suite. L'ouvrage se termine par la liste des références précises des documents présentés, puis une bibliographie et un index. Faisant des emprunts à la quasi-totalité des sciences de la nature, il ne peut être partout complet, mais il constitue une invitation à aller plus loin sur les divers sujets abordés.

Ajoutons que l'éditeur a tenu à proposer un ouvrage scientifique qui soit en même temps un beau livre, relié pleine toile, sous jaquette en couleur, ce qui n'est pas négligeable, car un livre, c'est un message enfermé dans un objet, et si l'objet est beau, c'est un bonheur de plus.

R. C.

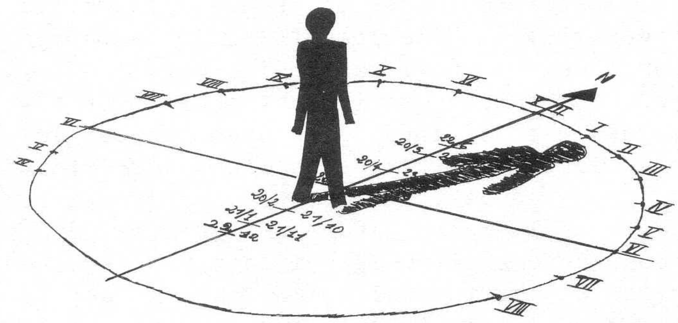
LA PRATIQUE DE L'ASTRONOMIE, par Bernard Carbonneaux, Philippe Didier et Claude Mathieu ; Edition CEDIC, 1983, 221 p. nombreuses illustrations.

Dans la collection "Activités dans la mathématique", les éditions CEDIC ne nous ont guère habitué à publier des ouvrages d'astronomie, celui-ci étant le premier. Mais ce coup d'essai est un coup de maître ; sans jeu de mots, l'ouvrage ayant été rédigé par trois enseignants : MM. Carbonneaux, Didier et Mathieu.

Notre ami et collègue Gilbert Walusinski a parfaitement résumé l'originalité de "la pratique de l'astronomie" dans sa préface : "Mérite singulier : cet ouvrage ne présente pas le plan de ce qu'il faudrait faire ; il est le résultat d'une pratique effective. Tous les exercices proposés ont été effectués par plusieurs groupes d'élèves et l'équipe MCD (les auteurs) a mis en commun de façon aussi critique qu'efficace les observations recueillies, aussi bien sur le plan de la science astronomique elle-même que sur celui de la pédagogie."

L'ouvrage est divisé en six chapitres : la lumière et les ombres, les cadrans solaires, le calendrier, la Lune, le Soleil, le ciel nocturne. Chaque chapitre est composé de sous-chapitres comportant : des "activités" (par exemple étude de l'arc-en-ciel), des "informations" (mesure de la distance Terre-Lune) ; ainsi que d'autres rubriques : "une expérience", "interpréter et réfléchir", etc...

Remarquons qu'un chapitre est consacré aux cadrans solaires, ce qui est suffisamment rare pour qu'on puisse le souligner. Qui plus est, les auteurs ne s'arrêtent pas aux cadrans classiques, c'est-à-dire les cadrans solaires équatoriaux, horizontaux ou verticaux, mais traitent aussi du cadran solaire analemmatique, considéré ailleurs comme un sujet difficile. Ici, le sens et la construction de ce cadran semblent couler de source.



CADRAN SOLAIRE ANALEMMATIQUE

Tracés et données nécessaires

Buts : • Tracer au sol un cadran d'usage collectif, très attrayant, avec un matériel pratiquement inexistant.
• Rechercher dans les tableaux, des valeurs concernant une réalisation géométrique.

Matériel : ficelle, 2 piquets, craie, équerre, rapporteur, règle.

J'ai pris un grand plaisir à lire ce livre qui n'est pas seulement descriptif, mais cherche à faire réfléchir en prenant les phénomènes par le début. Cet ouvrage ne devrait être ignoré d'aucun enseignant intéressé par l'astronomie.

Gérard Oudenot

Questions-Réponses

Dans cette rubrique, nous accueillerons vos questions d'ordre mathématique, scientifique ou bibliographique. Nous nous efforcerons d'y répondre, par nous-même ou par l'intermédiaire d'autres lecteurs.

QUESTION : "L'équation dite de Pell est de la forme : $x^2-Ay^2=1$ avec A entier positif non carré parfait, où x et y sont des entiers positifs. On sait la résoudre quel que soit A. Existe-t-il une méthode permettant de résoudre : $x^3-Ay^3=1$? " (Jacques CHAUPIN-Vitry le François-).

REPONSE : revenons d'abord sur l'équation $x^2-Ay^2=1$, qu'il faudrait plutôt appeler EQUATION DE FERMAT, attendu que John Pell (1611-1685) ne s'en est jamais occupé. La façon "moderne" d'aborder la question est d'écrire cette équation : $(x+y\sqrt{A})(x-y\sqrt{A})=1$ et de considérer l'ensemble des nombres de la forme $x+y\sqrt{A}$ où x et y sont des NOMBRES RATIONNELS. Cet ensemble est un CORPS, que l'on note $\mathbb{Q}(\sqrt{A})$. Si $\alpha=x+y\sqrt{A}$ est un élément de ce corps, alors $x-y\sqrt{A}$ est son CONJUGUE et leur produit, égal à x^2-Ay^2, est appelé la NORME de α, notée $N(\alpha)$. L'ensemble des nombres de la forme $x+y\sqrt{A}$, où x et y sont des ENTIERS RATIONNELS, est un anneau noté $\mathbb{Z}[\sqrt{A}]$ et les éléments de cet anneau qui ont un inverse dans cet anneau s'appellent des UNITES : ces unités forment un groupe multiplicatif U que l'on nomme naturellement le GROUPE DES UNITES de $\mathbb{Z}[\sqrt{A}]$. Il n'est pas difficile de montrer qu'un élément α de $\mathbb{Z}[\sqrt{A}]$ est une unité si et seulement si l'on a $N(\alpha)=\pm1$, soit $x^2-Ay^2=\pm1$. De sorte que la résolution de l'équation de Fermat-Pell est interprétée de nos jours comme la détermination des unités des corps quadratiques. La réponse à cette question est parfaitement connue : le groupe des unités d'un corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{A})$ est de la forme $\{\pm\theta^n/n\in\mathbb{Z}\}$ où θ est une unité particulière dite UNITE FONDAMENTALE.

En conséquence, il existe une solution $x=a$, $y=b$, de l' équation $x^2-Ay^2=1$, dite solution fondamentale, telle que toute autre solution (x,y) soit donnée par la formule : $x+y\sqrt{A}=(a+b\sqrt{A})^n$. Cette solution fondamentale se détermine par développement de $\sqrt{A}$ en fraction continue suivant un procédé dû à Euler et Lagrange. Elle peut être très simple (pour A=30, on a a=11 et b=2) ou plus compliquée (pour A=31, il faut prendre a=1520 et b=273).

Pour en savoir plus sur ces questions, vous pouvez vous reporter aux deux "Que sais-je ?" de Jean Itard : "LES NOMBRES PREMIERS" (n°571) et "ARITHMETIQUE ET THEORIE DES NOMBRES" (n°1093). Et pour continuer : "THEORIE ALGEBRIQUE DES NOMBRES" de P. Samuel (Hermann, 1967).

Cette façon de reconsidérer le problème, dans le cadre de la théorie des corps de nombres algébriques, date de Dirichlet et Dedekind. Elle devient essentielle pour répondre à la question posée par M. Chaupin, concernant l'équation $x^3-Ay^3=1$. Ici les choses se compliquent car l'ensemble des nombres de la forme $x+y\sqrt[3]{A}$, avec x et y rationnels, n'est pas un corps. Pour obtenir un corps K, noté $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{A})$, il faut prendre l'ensemble des $\alpha=x+y\sqrt[3]{A}+z\sqrt[3]{A^2}$ avec x, y, z rationnels. Un élément α de ce corps n'a pas un conjugué mais deux : $x+jy\sqrt[3]{A}+j^2z\sqrt[3]{A^2}$ et $x+j^2y\sqrt[3]{A}+jz\sqrt[3]{A^2}$, qui d'ailleurs ne sont pas éléments du corps (j et j^2 désignant les racines cubiques complexes de l'unité). Et la norme de α, produit de ces trois conjugués, n'est pas x^3-Ay^3 mais, hélas, $x^3+Ay^3+A^2z^3-3Axyz$. Comme ci-dessus, il faut déterminer le groupe des unités du corps K, qui est maintenant un CORPS CUBIQUE. Par chance, ce groupe est encore de la forme $U=\{\pm\theta^n/n\in\mathbb{Z}\}$, où θ est encore appelée UNITE FONDAMENTALE.

Mais ici, toutes les unités ne vont pas convenir : encore faudra-t-il qu'elles soient "binômiales", c'est-à-dire de la forme $x+y\sqrt[3]{A}$, avec z=0, afin que leur norme soit égale à x^3+Ay^3, ce qui nous donnera $x^3+Ay^3=\pm1$, et le problème sera résolu, quitte à changer le signe de x et y. Et là, il y a du nouveau : il y a AU PLUS UNE solution, autre que la solution "triviale" x=1, y=0. Seule l'unité fondamentale convient, ou son carré, suivant les cas, ou bien encore aucune des deux. Tout ceci a été démontré par le mathématicien russe Boris Delaunay en 1916, puis développé et généralisé aux équations

$Ax^3+By^3=c$ par le suédois Trygve Nagell en 1925. C'est pourquoi le résultat concernant l'équation $x^3-Ay^3=1$ est connu sous le nom de "théorème de Delaunay-Nagell". Pour en savoir plus sur ce point précis, on peut consulter "TOPICS IN NUMBER THEORY" de W. J. LeVeque , Vol. II (Addison Wesley, 1956).

On voit que les équations diophantiennes de degré supérieur à deux diffèrent notablement de celles de degré deux : l'équation de Fermat $x^2-Ay^2=1$ a toujours une infinité de solutions, tandis que l'équation $x^3-Ay^3=1$ en a au plus une. Cette remarque se généralise : un théorème d'Axel Thue, de 1909, dit que, si $P(x,y)$ est un polynôme homogène irréductible de degré $\geqslant 3$, alors l'équation $P(x,y)=m$ a un nombre FINI de solutions en nombres entiers, ce nombre pouvant être nul.

Si le problème est donc parfaitement résolu sur le plan théorique, il n'en est pas de même du point de vue pratique. La détermination de l'unité fondamentale des corps $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{A})$ est encore l'objet de recherches très actives, en relation avec les moyens de calcul les plus modernes. Pour les petites valeurs de A, on dispose de tables qui datent d'une trentaine d'années, et qui permettent donc de résoudre pratiquement l'équation proposée dans ces cas-là.

R.C.

SOLUTIONS (ECHECS)

-A- 1. ... f6+! 2. Rg4 (2. Dxf6?? Dg3 mat) Dg2+ 3. Dg3 f5+ 4. Rf4 e5+! 5. dxe5 Dd2 mat! 0-1.
-B- 1. ... Fe1! 2. Txc5 Te3+ 3.Rc2 (3. Rd4 Fc3 mat) Txe2+ 0-1.
-C- 1. ... Te1+ 2. Rh2 Th1+! 3. Rxh1 Dh3+ 4. Rg1 Dxg2 mat 0-1.
-D- 1. ... Td1! (2. Txd1 Dxf2+ 3. Rh1 Dg1 mat) 0-1.
-E- 1. ... Cd3! 2. Dxg4 (2. Dxd3, même résultat) Dc5+ 3. Rh1 Cf2+ 4. Rg1 Ch3++ 5. Rh1 Dg1+ 6. Txg1 Cf2 mat 0-1.
-F- 1. ... Cg3+! 2. hxg3 hxg3+ 3. Rg1 Cf2! 4. Txf2 Th1+! 5. Rxh1 gxf2 0-1.

REVUE DES LIVRES (SUITE)

AINSI NAQUIT L'INFORMATIQUE, par R. Moreau, Bordas 1981, collection Dunod Informatique, 222 p., 12 photos, 37 figures ou tables.

Cet excellent petit livre vise plusieurs catégories de publics :

-les spécialistes, généralement peu au courant des questions historiques (même ceux qui, comme moi, ont vécu les premiers développements de l'informatique), trouveront une foule de détails qui leur auront échappé en leur temps ; leurs connaissances seront considérablement enrichies et consolidées par ce retour en arrière ;

-les informaticiens non professionnels, de plus en plus nombreux, découvriront le cheminement (depuis le Moyen-Age) de toutes les idées maintenant installées dans la pratique quotidienne de leur art ;

-le grand public enfin, découvrira tous les aspects techniques de l'informatique, présentés sous une forme compréhensible, du fait même des explications historiques qui les baignent.

Certains lecteurs regretteront peut-être que l'auteur ne se soit pas laissé emporter par son passionnant sujet vers des envolées lyriques et des développement biographiques sur les personnages-clés de cette histoire. On trouvera, à défaut, une bibliographie copieuse qui permettra aux curieux d'en savoir davantage.

J-C. H.

Les problèmes du nouvel Archimède

Pour ce premier numéro de notre nouvelle revue, la présente rubrique veut aussi faire peau neuve et remettre le compteur à zéro. Nous allons désormais élargir le champ des problèmes que nous vous proposons, en distinguant deux catégories:

les "problèmes élémentaires", faisables en principe par un élève de l'enseignement secondaire, et les "problèmes" tout court qui ne seront point astreints à une telle limitation. Les premiers pourront servir à nos lecteurs enseignants pour faire travailler leurs élèves et à nos lecteurs-élèves pour s'entraîner -outre le pur plaisir de chercher, qui n'a besoin d'aucune autre "motivation". Les seconds seront plus spécialement adressés aux étudiants, aux professeurs et à tous les amateurs susceptibles de s'y intéresser, à tous les esprits curieux. Il est bien clair qu'une telle classification reste en grande partie arbitraire, car une solution inattendue peut faire sauter un problème d'une catégorie dans une autre. Nous tenterons de prouver le mouvement en marchant, et de faire vivre cette rubrique sous sa nouvelle forme. Pour cela, nous comptons plus que jamais sur vous tous.

Problèmes élémentaires

E.1. La suite de Fibonacci est définie par $F_0=0$, $F_1=1$, $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$, et la suite de Lucas par $L_0=2$, $L_1=1$, $L_n=L_{n-1}+L_{n-2}$. Quels sont les nombres (comme 1,2,3) qui sont à la fois des termes de la suite de Fibonacci et des termes de la suite de Lucas ?

E.2. Entre 1950 et 1960, le prix moyen du riz a augmenté en France de 32%. Mais dans cette même période, le riz de luxe a augmenté de 25% et le riz ordinaire de 15%. Comment expliquer cela ?
(construire un modèle qui prouve que c'est possible.)

E.3. Combien l'équation $\cos x+\ln x=0$ a-t-elle de racines ? (La notation "ln" désigne le logarithme népérien.)

E.4. Soient A et B deux points de l'espace. Déterminer l'ensemble des points M tels que : $MA^2+MB^2+MA\cdot MB=AB^2$.

Problèmes

P.1. Inscrire, dans un triangle donné, une ellipse d'aire maximum.

P.2. L'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}dx$ est-elle convergente ou divergente ?

P.3. Démontrer qu'il existe un entier positif k tel que $k.2^n+1$ soit composé pour tout entier n positif.

P.4. Déterminer la limite de la suite $u_n=e^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\dots+\frac{n^n}{n!}\right)$.

Solutions

> PB 165, PA 97-98, p. 41 (lignes brisées rectangles)
>
> Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Pour quelles valeurs de n existe-t-il, dans l'espace à trois dimensions, une ligne brisée fermée simple à n côtés dont les côtés consécutifs soient perpendiculaires. Et si l'on exige de plus que les côtés soient égaux ?

Parmi les solutions possibles, c'est l'Escalier qui a eu la préférence de nos lecteurs. Pour n pair, $n \geqslant 4$, il fournit en effet une solution très simple (fig : 1), même si l'on exige que les côtés soient tous égaux. Pour n impair, on remplace les trois segments de la dernière marche par deux (fig : 2) mais alors les côtés ne sont plus tous égaux.

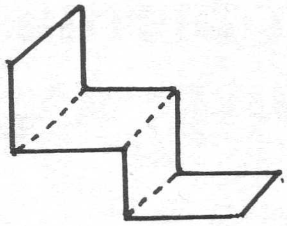


Fig. 1

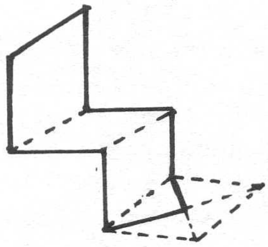


Fig. 2

Pour $n=7$, une solution avec côtés égaux est fournie par la figure 3 : le quadrilatère ABCG est un carré de côté a situé dans un plan horizontal, le quadrilatère GCDF est un trapèze isocèle vertical vérifiant $FG=GC=CD=a$, $FD=a\sqrt{2}$: sa hauteur est $h=\frac{a}{2}\sqrt{1+2\sqrt{2}}=IJ$. Les droites AG et BC sont perpendiculaires au plan GCDF, donc à GF et CD respectivement. On complète par un triangle DEF isocèle rectangle ($DE=EF=a$) disposé de telle manière que l'angle $\widehat{GFE}$ soit droit. Intuitivement, on sent que c'est possible, en faisant pivoter le plan DEF autour de la charnière DF. Plus rigoureusement, soit I le milieu de GC et J celui de FD ; le point E conviendra dès qu'il sera situé dans le plan P médiateur de CG et DF et que l'on aura $EF=a$, $EG=a\sqrt{2}$. Le triangle EGI sera rectangle en I et l'on aura $EI=\sqrt{EG^2-GI^2}=\frac{a}{2}\sqrt{7}$. Il suffit donc de construire dans le plan P le triangle EIJ défini par $EI=\frac{a}{2}\sqrt{7}$ et $EJ=\frac{a}{2}\sqrt{2}$, et le point E ainsi obtenu convient. On peut même se payer le luxe de déterminer l'angle $\widehat{IJE}$, qui est l'angle des plans GCDF et DEF : son cosinus vaut $\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{1+2\sqrt{2}}}$, de sorte que $\widehat{IJE} \simeq 102°$.

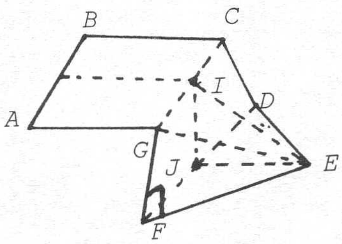


Fig. 3

En remplaçant le segment AB par une suite de segments du genre de l'escalier de la figure 1, on obtient une solution pour tout n impair, avec $n \geqslant 7$.

Il reste le cas $n=5$: comment construire un pentagone gauche ABCDE, avec $AB=BC=CD=DE=EA=a$ et possédant cinq angles droits, ou bien vérifiant $AD=DB=BE=EC=a\sqrt{2}$?

Considérons d'abord les quatre points A, B, C, D tels que $AB=BC=CD=a$ et $AB \perp BC$, $BC \perp CD$ (fig : 4). Soit P le plan passant par C et D et parallèle à AB. On projette

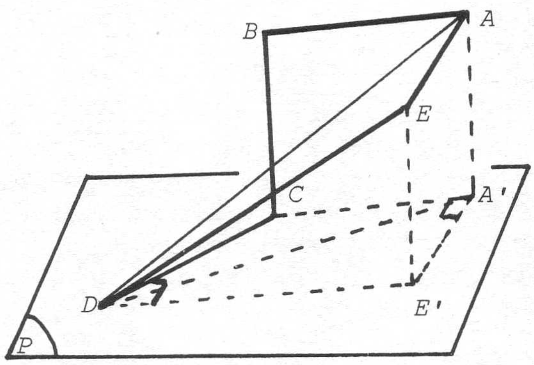


Fig. 4

orthogonalement A en A' sur ce plan P : puisque $AD=a\sqrt{2}$, on a : $DA'^2=DA^2-AA'^2=2a^2-a^2=a^2$, de sorte que le triangle CA'D est équilatéral. Si maintenant on projette E en E' sur P, puisque $EA\perp AB$ et AB//P, on a $E'A'\perp A'C$. De même, $E'D\perp CD$ car $ED\perp CD$. Dans le plan P, les points CDE'A' sont dans la disposition donnée par la figure 5. On trouve alors : $DE'=E'A'=\frac{a}{\sqrt{3}}$ et, puisque $DE=a$, $EE'=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}=a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Il faudrait enfin que l'on ait : $AE^2=A'E'^2+(AA'-EE')^2$, mais si l'on se souvient que $AA'=AE=a$, on constate que ceci est IMPOSSIBLE.

Conclusion : la construction est possible pour tout $n\geq 4$ si l'on n'exige pas que les côtés soient tous égaux et pour $n=4$ ou $n\geq 6$ si on l'exige.

J'ai reçu deux solutions très complètes, dont celle-ci est une synthèse, de M. Lemaire, de Lille, et de Hugues Fontvieille et François Ozog, du club "Echecs et Maths" du Lycée Simone Weil du Puy.

PB 167, PA 99-100, p. 43 (carrés-cube .)

Le cube d'un entier peut-il être la somme des carrés de deux entiers consécutifs ?

Il s'agit de résoudre en nombres entiers l'équation : $x^2+(x+1)^2=y^3$. Mme Chrétien, de Villemomble, M. Lemaire, de Lille et M. Roux, de Chadrac, observent que cette équation s'écrit aussi : $(4x+2)^2+4=(2y)^3$, soit $X^2+4=Y^3$, avec $X=4x+2$ et $Y=2y$. Or, on trouve dans la lettre de Fermat à Carcavi d'août 1659 l'assertion suivante :

"Il n'y a que deux carrés en entiers, lesquels augmentés de 4, fassent un cube. Les dits carrés sont 4 et 121."

Donc $X=4$ ou $X=121$. Comme $X=2x+2$ doit être pair, seul $X^2=4$ doit être retenu, d'où $x=0, y=1$.

Mais comment démontre-t-on la propriété énoncée par Fermat ?

Il faut faire intervenir l'anneau $\mathbb{G}$ des ENTIERS DE GAUSS, nombres de la forme $a+bi$, avec a et b entiers relatifs et $i^2=-1$. Tout comme $\mathbb{Z}$, cet anneau est intègre et commutatif. On peut y définir une relation de divisibilité, comme dans $\mathbb{Z}$: si z et z' sont éléments de $\mathbb{G}$, on dira que z divise z' (ou "est diviseur" de z') s'il existe z" élément de $\mathbb{G}$, tel que $z'=zz"$. Une différence avec $\mathbb{Z}$, c'est que, dans $\mathbb{G}$, il y a quatre éléments inversibles : 1, -1, i, -i, que l'on appelle les UNITES (contre deux seulement dans $\mathbb{Z}$: 1 et -1). Tout entier de Gauss z admet pour diviseurs 1, -1, i, -i, et aussi z, -z, iz, -iz : ces

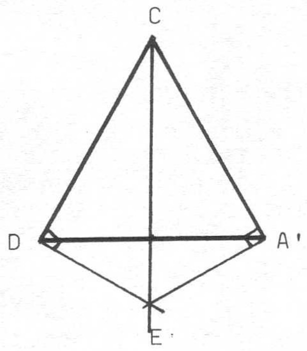


Fig. 5

quatre derniers s'appellent les ASSOCIES de z. S'il n'a pas d'autre diviseur, il est dit PREMIER. Comme dans $\mathbb{Z}$, tout entier de Gauss qui n'est ni nul ni une unité admet une décomposition en produit de facteurs premiers, décomposition unique à l'ordre près et à des facteurs unitaires près. Par exemple, $5=(1+2i)(1-2i)=(2+i)(2-i)$ constitue une seule et même décomposition car $2+i=i(1-2i)$. On exprime ce fait en disant que l'anneau $\mathbb{G}$ est FACTORIEL.

Après ce long détour, revenons à notre problème : la relation $x^2+(x+1)^2=y^3$ s'écrit aussi : $(x+1+xi)(x+1-xi)=y^3$. Mais les entiers de Gauss $u=x+1+xi$ et $v=x+1-xi$ sont PREMIERS ENTRE EUX, c'est-à-dire qu'ils n'ont pas de diviseurs communs autres que les quatre unités de l'anneau $\mathbb{G}$. Pour démontrer ceci, on suppose qu'ils ont un diviseur premier commun p ($p\in\mathbb{G}$). Puisque p divise u et v, il divise leur somme $2x+2$ et leur différence $2xi$. Il divise donc 2x, et donc il divise enfin $(2x+2)-2x=2$. Or, dans $\mathbb{G}$, le nombre 2 n'est pas premier car $2=-i(1+i)^2$, mais son seul facteur premier est 1+i (plus ses trois associés). Il en résulte que 1+i est diviseur de u et de v. Mais si 1+i divise u, alors son conjugué 1-i divise $\bar{u}=v$ et donc le produit $(1+i)(1-i)$, qui est égal à 2, divise le produit uv, égal à $x^2+(x+1)^2$. Cette conclusion est visiblement erronée, puisque $x^2+(x+1)^2$ est impair.

Donc, x+1+xi et x+1-xi sont premiers entre eux dans $\mathbb{G}$. Leur produit étant un cube, puisque $\mathbb{G}$ est factoriel, il faut que chacun soit un cube (à un facteur unitaire près, mais les unités étant elles-mêmes des cubes, cette restriction peut être levée). Il existe donc a et b entiers relatifs tels que : $x+1+xi=(a+bi)^3$. Puisque a, b, x sont réels, ceci implique

$a^3-3ab^2=x+1$, $3a^2b-b^3=x$, d'où par soustraction : $a^3-3ab^2-3a^2b+b^3=1$. C'est-à-dire : $(a+b)(a^2-4ab+b^2)=1$. Un produit de deux entiers égal à 1, cela n'est possible que si chacun de ces deux entiers vaut 1 ou -1. Il est alors aisé d'aboutir au résultat annoncé ci-dessus, et nos lecteurs n'y manqueront pas.

On peut généraliser ce problème dans deux directions :

-On peut chercher à résoudre en nombres entiers l'équation $x^2+(x+1)^2=y^k$ avec $k \geqslant 4$. Ceci a été fait : il n'y a pas de solution.
-On peut chercher si la somme de n carrés consécutifs peut être un cube. C'est ce que demande M. Roux, qui répond NON, avec preuves à l'appui, pour n=3, 4, 5, et ainsi de suite jusqu'à 21, sauf peut-etre pour 6, 11, 16. Mais la réponse générale fait défaut : qu'en pensez-vous ?

PB 168, PA 99-100, p. 43 (partage d'un cube.)

Démontrer qu'il existe un entier N, tel que pour tout $n \geqslant N$, on puisse partager un cube en n cubes plus petits, égaux ou non. Donner une valeur de N.

Soit E l'ensemble des entiers n tels que l'on puisse partager un cube en n cubes. Il est d'abord évident que tout $n=a^3$ est élément de E, de même que tout $n=a^3-b^3$ avec $a>b$: on partage le grand cube en a^3 petits puis on en agglomère b^3 sur un coin. Par exemple, la figure 6 montre des partages en 8, 20 et 38 cubes, partages que l'on appellera respectivement I, II, III.

Si $n \in E$ et $m \in E$, alors on peut partager le cube en n cubes, puis partager l'un des petits cubes en m cubes, et le partage final se fera donc en $n+m-1$ cubes. Nous avons ainsi prouvé que, si $m \in E$ et si $n \in E$, alors $m+n-1 \in E$. Par suite, si $n \in E$ alors $n+7 \in E$, donc $n+14 \in E$, etc... et en général $n+7k \in E$ pour tout k entier naturel. Donc si l'on trouve SEPT entiers consécutifs n_0, n_0+1, ...n_0+6 éléments de E, alors tous les entiers $n \geqslant n_0$ seront éléments de E.

On peut déjà signaler quelques éléments de E : 48 car $48=20+(4\times7)$, 50 car $50=8+(6\times7)$, 52 car $52=38+(2\times7)$, 53 car $53=27+27-1$.

Ensuite, on peut partager un cube d'arête a selon la figure 7 : un étage de 4 cubes d'arête $\frac{a}{2}$, puis 9 cubes d'arête $\frac{a}{3}$ et enfin un étage de 36 cubes d'arête $\frac{a}{6}$. En tout $49 \in E$.

Considérons ensuite le partage II ci-dessus. Dans ce partage, on subdivise deux cubes adjacents égaux en 20 cubes selon II, en ayant soin de placer, dans ces deux derniers partages, les deux couches de neuf petits cubes l'une contre l'autre. Le partage obtenu comprend $20+(2\times20)-2=58$ cubes, et dans ce partage on peut trouver 8 cubes adjacents, dont l'arête est $\frac{1}{9}$ du grand cube initial, et qui à eux huit forment un cube. En les agglomérant, on obtient un partage en $58-8+1=51$ cubes, et 51 est élément de E (voir figure 8).

Poursuivons. On applique au cube initial (d'arête 1) le partage I, ce qui nous donne 8 petits cubes. On subdivise deux cubes adjacents en 38 cubes selon le partage III, en ayant soin que les deux couches de 16 tout petits cubes soient voisines (figure 9) : nous avons ainsi $8+(2\times38)-2=82$ cubes. Mais ces deux couches de 16, regroupant 32 cubes d'arête $\frac{1}{8}$, peuvent s'agglomérer en 4 cubes d'arête $\frac{1}{4}$, d'où en fin de compte $82-32+4=54$ CUBES. C'est difficile à expliquer ainsi, mais "do it yourself", et vous verrez.

Récapitulons : on peut partager un cube en 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54 : bref on peut partager un cube en n cubes pour $n \geqslant n_0$ avec $n_0=48$: qui dit mieux ?

La solution ci-dessus est rédigée à partir de deux excellents textes fournis par MM. Roux et Lemaire.

Amis lecteurs, je répète que la réussite du Nouvel Archimede sera votre réussite autant que la nôtre. Profitez de la liberté nouvelle que nous pouvons prendre, pour nous adresser plus que jamais des solutions, des énoncés, des suggestions, des critiques, des avis de toute sorte, toujours à :

M. Roger Cuculière
Professeur de Mathématiques
Lycée Carnot
145, bd Malesherbes
75017 PARIS

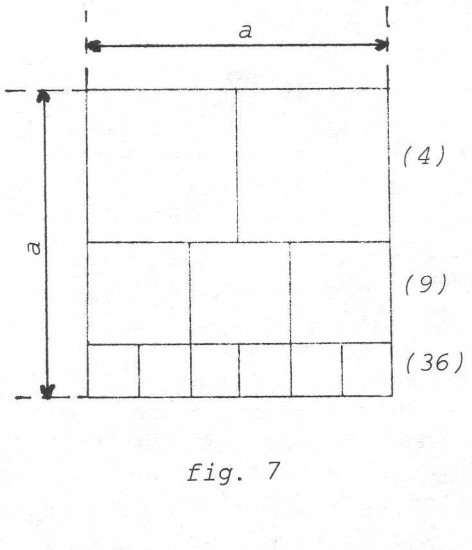


fig. 7

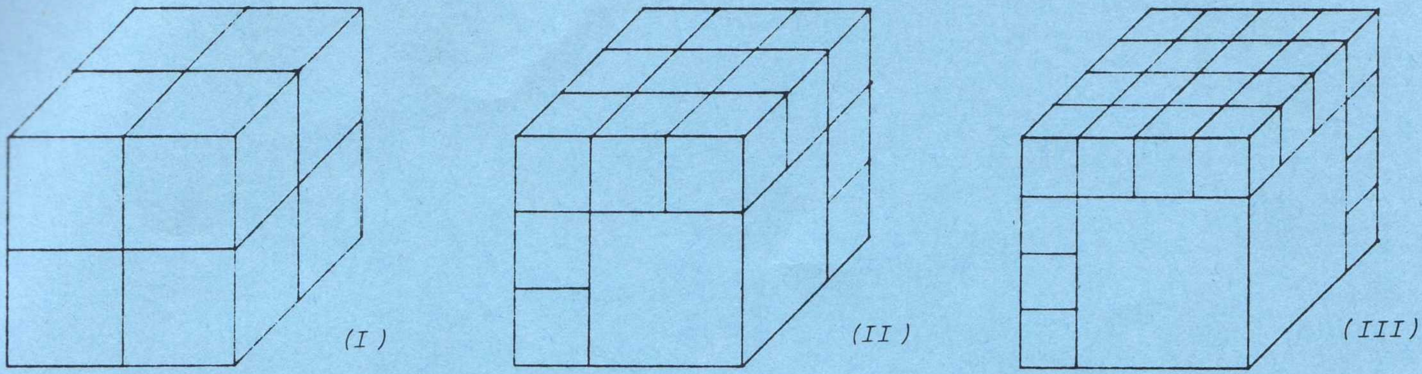


fig. 6

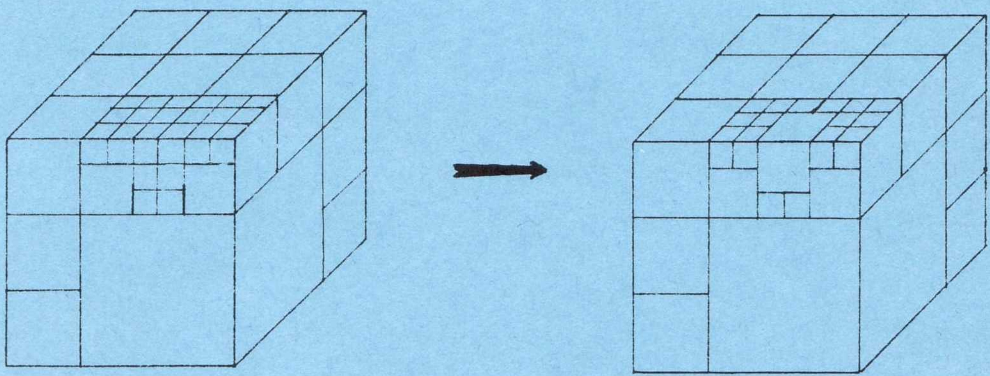


fig. 8

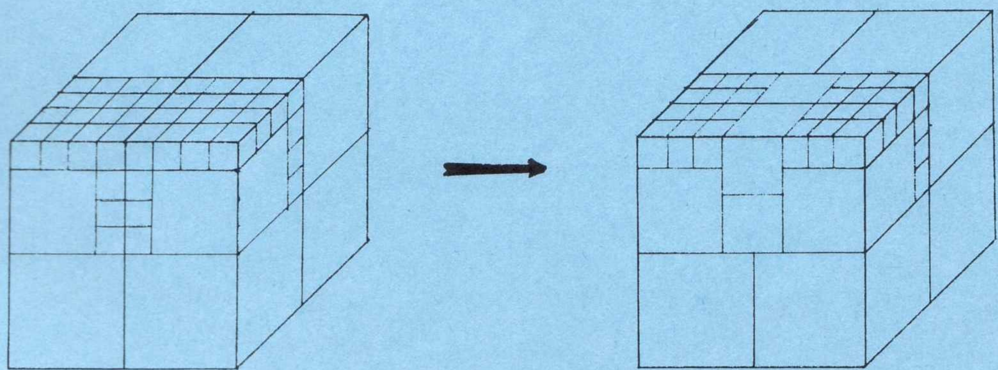


fig. 9

LE PETIT ARCHIMEDE

vous présente

LE NOUVEL ARCHIMEDE

REVUE DE L'ASSOCIATION POUR LE DEVELOPPEMENT DE LA CULTURE SCIENTIFIQUE

120 pages par an, en au moins 3 numéros
Commission paritaire des presses 59930

ABONNEMENT 1984

Abonnement de soutien: 120 f
Abonnement de Bienfaiteur: 500F
Abonnement ordinaire: 60f
Abonnements groupés (minimum 10) : 40F
(ils peuvent être servis à une ou plusieurs adresses)

MAJORATION POUR TOUT ENVOI HORS EUROPE ou PAR AVION(le préciser) de 50%

TOUTES les collections anciennes sont disponibles, 1 à 10, 11 à 20,...91 à 100:
60F la collection. Le numéro isolé (double ou simple):20F

NUMERO SPECIAL"PI": 75 F
à partir de 4 exemplaires: 70F l'unité
à partir de 10 exemplaires: 60F l'unité

LE P.A.-TAQUINOSCOPE et son étude mathématique: 70F

NOM Prénom
Adresse d'expédition:
Code postal: Ville:
Bureau distributeur:

Cette demande est à adresser EXCLUSIVEMENT à

ADCS-abonnement B.P.222 80002 Amiens Cedex

(et joindre chèque ou mandat à l'ordre de l'ADCS)

Le directeur de la publication: Yvan Grimaldi
Le président de l'A.D.C.S.: Yves Roussel

© Dépôt légal: Juin 1984 N°101: 20F

IMPRIMERIE I & R.G. Tél. 92.60.16