le petit archimède

PA 73-74

10 numéros par an

MARS-AVRIL 1981

d'après M. ESCHER
Patrick MERCIER (Compiègne)

SOMMAIRE

Nos conventions : pour les «petits» facile
difficulté moyenne pour les grands

ANECDOTE OU RÉALITÉ ?

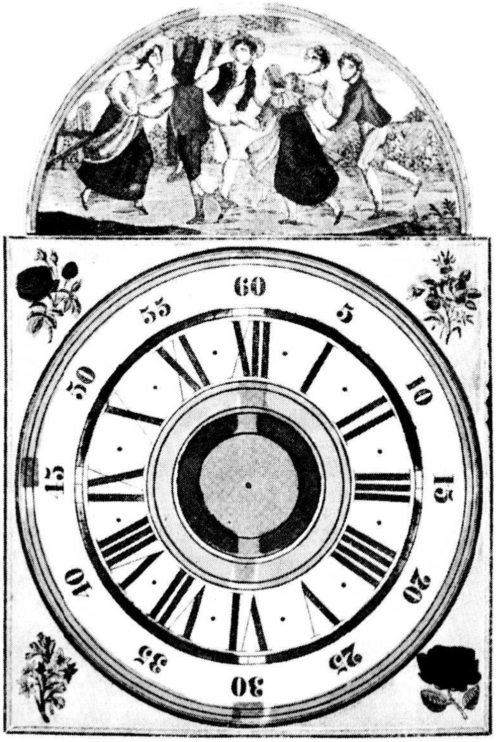
«Il était une fois...»

Pour les abonnés attentifs à PA, ce qui suit peut en effet faire figure de ritournelle ; et nous laissons volontiers à nos lecteurs le soin de bien comprendre le sens si peu caché de cet appel :

«Que se passerait-il si chaque lecteur d'une petite revue qui vit et survit au prix d'efforts quotidiens considérables trouvait un nouvel abonné ?»

PA

LE TEMPS



L'équipe de PA vient d'achever son premier numéro spécial légitimement consacré à PI, nombre d'Archimède. Elle a pris le temps d'effectuer ce long travail de près de quatre années, mais aussi celui de réfléchir à un autre numéro spécial ! Et vous, lecteur, avez-vous pris le temps de faire connaître PI ? Avez-vous pris le temps de l'offrir ?

Nous vous proposons aujourd'hui de réfléchir à ce que pourrait être notre future production spéciale. A la demande de nombreux lecteurs, PA se propose d'étudier et de mettre en chantier une nouvelle œuvre commune :

LE TEMPS, SA MESURE, LE CALENDRIER, LES CADRANS SOLAIRES

Parce que ce thème touche tout à la fois aux Sciences (Astronomie, Physique,...), à leur histoire, mais aussi à celle des peuples, de leurs croyances, à nos techniques et à leur évolution... Il nous a semblé particulièrement intéressant de choisir comme projet d'études ce très beau sujet interdisciplinaire.

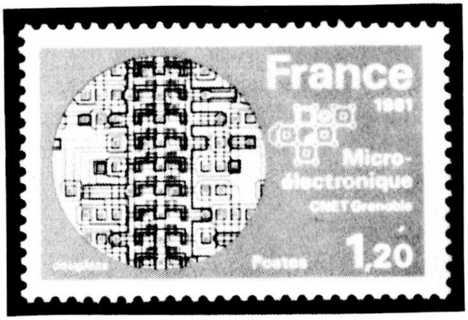
Nous vous invitons donc et avec insistance à nous poser toute sorte de questions sur ce sujet, à réfléchir à la forme et à la matière même de ce numéro, à son plan... Nous sommes confiants et décidés à réaliser ici, avec votre aide le meilleur travail possible. Nous en prendrons le temps.

Et que pensez-vous de votre PA... qui vous présente aujourd'hui sa première B.D. en quadrichromie qui se poursuit sur plusieurs numéros ?

P.A.

P.A. a trouvé la reproduction de ce cadre d'Horloge (XIX siècle France) sur une carte de l'UNICEF. Ne trouvez-vous pas étrange qu'elle porte l'écriture IIII pour le nombre que nous avons tous appris à écrire IV. En est-il toujours ainsi sur les cadrans d'horloge ?

INFORMATIQUE. SAUTS DE PUCE



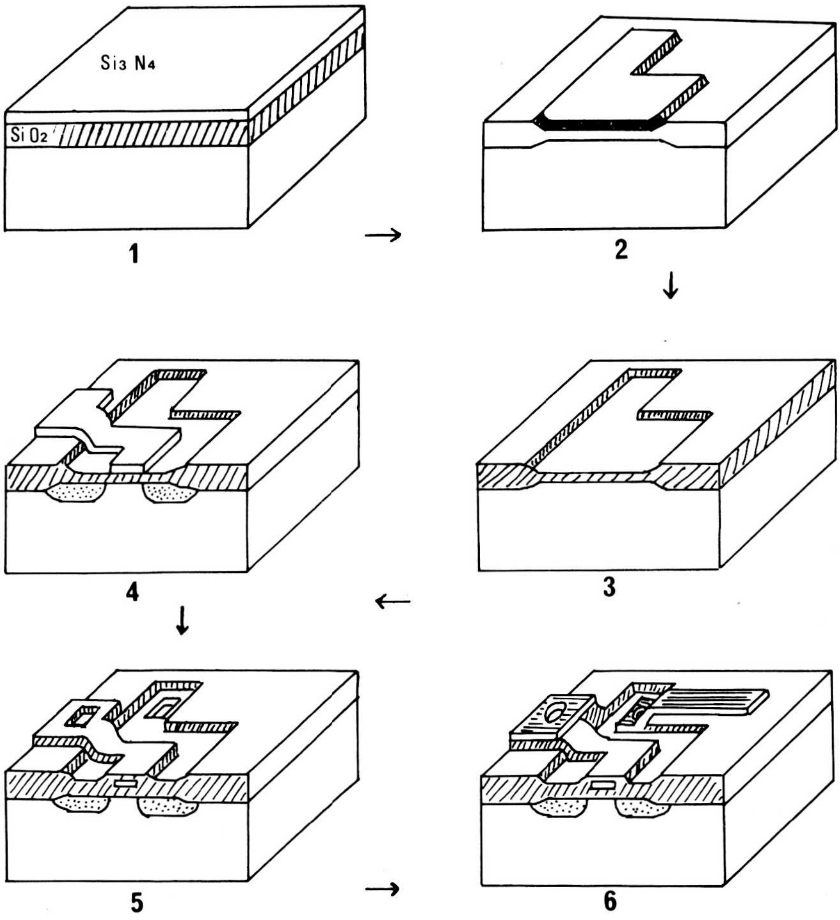
La porte logique trouve sa matérialisation physique idéale avec le transistor grâce auquel put voir le jour, en 1959, ce qui fut appelé la deuxième génération d'ordinateurs par opposition à la première qui utilisait des tubes électroniques coûteux et peu fiables. Mais cette deuxième génération faisait encore appel, comme la première, à des circuits constitués de composants discrets réunis sur une carte. Dès lors la recherche de performances toujours accrues, tant au plan de la puissance et de la taille des machines qu'à celui de leur capacité à se gérer elles-mêmes à l'aide d'un système d'exploitation, va amener l'informatique à accélérer l'intégration des composants afin d'en augmenter le nombre par unité de surface. L'idée générale est de réaliser à la fois la séparation et l'interconnexion des transistors à base de semi-conducteurs et des autres composants, non plus avec de la circuiterie, mais plutôt électriquement.

Le métal des connexions est déposé par photogravure puis évaporation, le substrat de départ principalement utilisé aujourd'hui étant une plaquette de silicium monocristallin découpée dans un barreau de 70 à 100 mm de côté avec au plus une épaisseur de quelques centaines de microns, la couche isolante indispensable faite de bioxyde de silicium (SiO_2) ayant été déposée préalablement à l'évaporation du métal. A partir de ce support il existe deux classes de technologies : la technologie bipolaire ou l'effet transistor est lié à des mesures verticales et la technologie MOS (Metal Oxyde on Silicon ou oxyde métallique sur silicium, voir figure) où l'effet transistor est lié à des dimensions latérales et se produit en surface du silicium, principalement sous une mini-zone d'oxyde de quelques centaines d'angstroems* d'épaisseur située entre deux zones diffusées distantes de quelques microns*.

La conception des circuits, notamment les mémoires, a poussé la technologie dans ses limites. L'augmentation de complexité passe essentiellement par des progrès dans la microlithographie dont le principe de base est de réaliser des motifs grâce à un faisceau

---

* Le micron vaut un millionième de mètre et l'angstroem vaut un dix milliardième de mètre.



1 - Dépôt de nitrure sur la plaquette de silicium recouverte de SiO_2

2 - gravure du nitrure et oxydation localisée.

3 - enlèvement du nitrure d'où motif en creux de SiO_2

4 - dépôt et gravure de silicium polycristallin (grille du transistor) et implantation d'impuretés

5 - nouveau dépôt de SiO_2 et ouverture des contacts.

6 - dépôt et gravure des connexions d'aluminium.

d'énergie (rayons UV, rayons X), par l'exposition à travers un masque ou non, d'un film sensible déposé sur la plaquette du semi-conducteur. Ce film organique est rendu soluble ou insoluble par le faisceau d'exposition. La partie restée ou devenue soluble est ensuite éliminée à l'aide de solvants et des zones d'oxyde ou de métal ainsi définies sont attaquées par une solution acide appropriée ou un plasma définissant ainsi une zone dite active faite donc de silicium dopé avec des impuretés diffusées. La limite de géométrie semble se situer autour du micron avec une précision de 0,25 micron sur une plaquette d'environ 13 cm.

La densité d'informations stockables sur une même «puce» d'environ 25 mm² — le vocable «puce» désignant dans le jargon d'électronicien un tel circuit découpé dans la plaquette et prêt à être encapsulé— double au moins tous les dix huit mois. En 1967 on pouvait enregistrer 10 bits par mm² (le bit est l'information élémentaire «0» ou «1» occupant un élément mémoire). Aujourd'hui cette densité est couramment de 2 000 bits. On sait même aller jusqu'à 450 000 transistors sur quelques mm². Mais avec des motifs élémentaires de 0,1 micron, ce qui est considéré comme raisonnable compte tenu de l'épaisseur d'oxyde minimale nécessaire, du taux de dopage et de la tension d'alimentation, les possibilités de traitement et de stockage de l'information seront considérables. On parle de placer dans 1 cm² de silicium un milliard de points de mémorisation, ce qui peut correspondre à 120 heures de parole synthétique, ou à une minute de visiophone, à 20 secondes de télévision, à 10 000 pages d'annuaire téléphonique ou encore 36 000 articles comme celui-ci.

C. CORGE

Ludolf van Keulen, décédé en 1610, avait émis le désir de voir gravées sur sa pierre tombale les vingt premières décimales de PI — record de l'époque — qu'il avait calculées; ce qui fut fait.

Dans notre numéro spécial PI, nous demandions (voir article page 265) quelles pourraient être les exigences en la matière de notre ami Jean Guilloud corecordman du premier million de décimales de PI (record imbattu depuis 1976; voir en particulier PA 68-69-70 pages 5 et 6). Nous sommes maintenant rassurés. Nos amis J. Guilloud et C. Boyer à qui nous souhaitons longue longue vie pourront avoir des exigences comparables à celles de «Louis de Cologne».

P.A.

Remerciements et appels

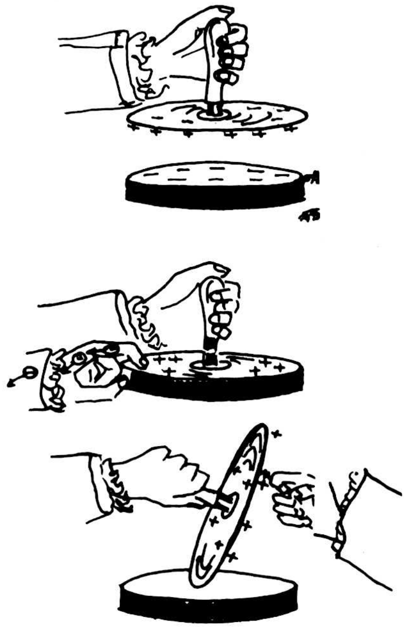
Les provisions de dessins de couverture s'épuisent. Nous remercions chaleureusement Patrick Mercier, élève de troisième du collège Gaétan Denain de Compiègne d'avoir autorisé PA à reproduire son très beau dessin destiné à une association amie qui avait organisé un concours de dessin dans les collèges et lycées de l'Académie d'Amiens.

Et nous lançons un appel pressant à nos jeunes lecteurs ! Nous vous demandons un effort... et des projets de couverture pour P.A.

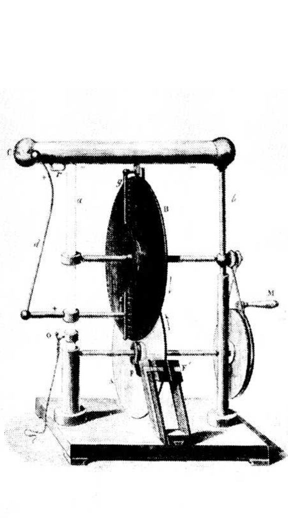
PETITE HISTOIRE DE L'ELECTRICITE (suite 1)

LES MACHINES A INFLUENCE

La découverte des phénomènes d'influence conduit les physiciens du XVIII[e] siècle à la réalisation des premières machines électriques à influence dont l'électrophore constitue le modèle. Une plaque de résine (ou aujourd'hui de matériau synthétique isolant) est électrisée négativement si on la frotte avec une peau de chat, on approche alors, jusqu'au contact, un plateau métallique conducteur qui subit l'influence. Les charges négatives du plateau sont repoussées à la terre par l'intermédiaire de pointes métalliques, qui traversent la plaque isolante dans son épaisseur pour affleurer à la surface. Les charges positives du plateau sont au contraire attirées par la plaque et maintenues sur la face interne. Lorsqu'on éloigne le plateau, celui-ci reste donc porteur de charges positives et il est possible d'en tirer une petite étincelle.



La machine de Carré, à influence, est formée de deux plateaux de verre tournant en sens inverse et dont les axes sont parallèles. Le plateau inférieur est électrisé positivement par frottement sur deux coussins. Il influence alors un peigne métallique dont les pointes deviennent alors négatives. Les charges négatives s'échappent par les pointes et dans leur tentative pour at-



Machine de Carré

teindre le plateau de verre positif, elles sont arrêtées par l'autre disque interposé et tournant en sens inverse ; elles se déposent alors sur ce dernier, qui les amène au collecteur dont la charge totale négative augmente.

L'ELECTRICITE GALVANIQUE ET LA PILE VOLTA

En 1786, s'ouvre un nouveau chapitre. Galvani, physicien italien, constate avec surprise que des cuisses de grenouille, suspendues à un balcon en fer par des fils de cuivre, éprouvent des contractions lorsque le vent les met en contact avec les montants de fer. Galvani ne donne alors à ce phénomène curieux aucune interprétation.

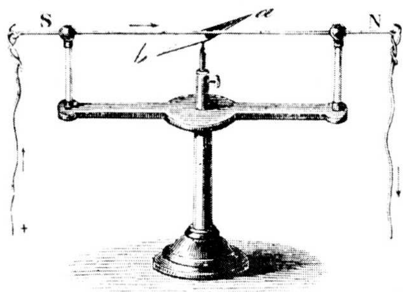
Galvani

Volta reprend l'étude de cette question et parvient à prouver que la cause en réside vraisemblablement dans la réunion du couple de métaux fer-cuivre, qui engendre un courant électrique excitant la contraction des muscles des cuisses de la grenouille. Il réalise alors artificiellement un assemblage de disques d'argent et de zinc, en couples séparés par du drap imbibé d'acide : la première pile est née (1800). A l'aide de cet appareil, on découvre très rapidement les effets chimiques du passage du courant électrique ; Nicholson et Carlisle observent la décomposition de l'eau en hydrogène et oxygène. Davy électrolyse la soude et découvre un mé-

Nicholson et Carlisle électrolysant l'eau tal nouveau le sodium. Napoléon offre à l'Ecole Polytechnique une batterie de 600 éléments.

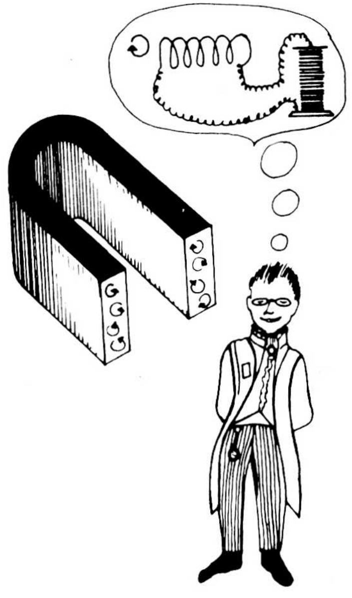
L'ELECTROMAGNETISME

Depuis longtemps, les physiciens pensaient que des liens étroits unissaient les phénomènes électriques et magnétiques, bien mieux, l'on avait constaté à plusieurs reprises, que des pièces de fer ou d'acier frappés par la foudre conservaient une aimantation.

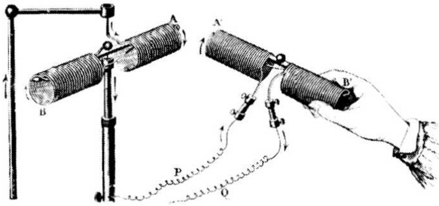


Expérience d'Oersted

En 1819, le physicien danois J. Oersted, professeur à l'Université de Copenhague, observe que l'aiguille aimantée d'une boussole dévie de la direction Nord-Sud, lorsqu'on fait passer le courant d'une pile de Volta dans un conducteur placé à son voisinage. Oersted remarque de plus que la déviation du pôle nord de l'aiguille se produit vers la gauche du conducteur par rapport au sens de circulation du courant. Cette expérience constitue le point de départ de l'électromagnétisme auquel Ampère et Faraday donneront tout son développement.

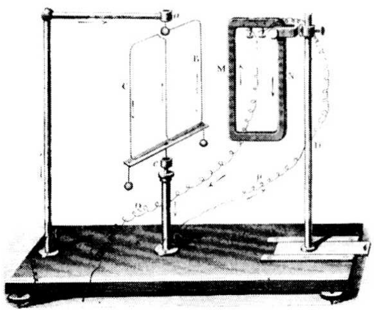


André Marie Ampère reprend dès 1820 les expériences d'Oersted. Convaincu de la nature électrique des phénomènes d'aimantation, et tentant de ramener le magnétisme à l'état de cas particulier de l'électromagnétisme, il imagine, au sein de la matière aimantée, des courants fermés, perpendiculaires à l'axe de l'aimant, et responsables selon lui, de l'aimantation. On ne peut qu'admirer l'intuition d'Ampère imaginant, en hypothèse, une nature élémentaire au magnétisme et qui se révélera exacte jusqu'au sein de l'atome moderne dont les propriétés magnétiques sont bien dues aux électrons qui tournent autour du noyau (et aussi sur eux-mêmes).



Répulsion de 2 solénoïdes

Pour vérifier son hypothèse des courants circulaires internes aux aimants, il réalisa des «spirales ou hélices galvaniques» (bobines de fil conducteur ou solénoïdes) annonçant qu'en tous les cas, elles devaient se présenter comme analogues aux barreaux aimantés.



Action mutuelle des circuits

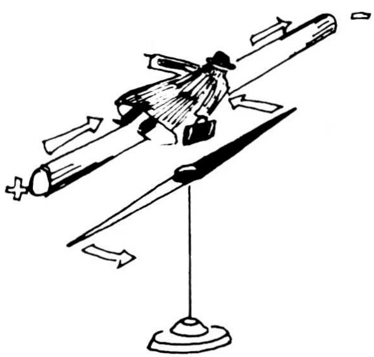
Ampère prédit aussi l'existence de forces s'exerçant entre des conducteurs électriques où circulent des courants. Deux tiges, parcourues par des courants de même sens, doivent s'attirer, au contraire deux conducteurs parcourus par des courants de sens contraires se repoussent. Les forces s'exerçant sur les conducteurs, placés dans les champs magnétiques d'aimants ou d'autres conducteurs, sont proportionnelles à :

— l'intensité du courant qui traverse le conducteur,

— l'intensité du champ magnétique.

Elles dépendent d'autre part de l'angle formé par les directions du champ et du courant, et elles s'exercent dans une direction perpendiculaire à ces deux directions précédemment définies.

Leur sens est donné par la règle, dite du bonhomme d'Ampère, que l'on couche par la pensée sur le conducteur, de sorte que le courant lui entre par les pieds et lui sorte par la tête ; si le bonhomme voit «fuir» le champ magnétique, la force qui s'exerce sur le conducteur est orientée vers sa gauche.



(à suivre)

PA vous présente un carré trimagique d'ordre 32

On sait ce qu'est un carré magique

Si les sommes des carrés des éléments de toute ligne, de toute colonne et des deux diagonales sont égales, le carré magique est dit «carré bimagique».

Si les sommes des cubes des éléments de toute ligne, de toute colonne et des deux diagonales sont de plus égales, le carré bimagique est dit «carré trimagique).

Les premiers carrés trimagiques construits étaient d'ordre 128, carrés de 128 x 128 cases, puis on en a construit d'ordre 81, puis d'ordre 64.

Le premier carré trimagique d'ordre 32 a été donné par W.H. Benson.

C'est en observant ce carré, en le démontant qu'un des collaborateurs de P.A. a eu l'idée de construire celui-ci. Il l'a fait non sans commettre quelques erreurs, aussitôt mises en évidence et corrigées par un ordinateur IBM.

Ce carré est vraisemblablement le deuxième carré trimagique d'ordre 32 construit. *(voir pages 12 et 13)*

32	985	799	230	92	933	867	154
833	184	126	903	829	196	2	1019
93	932	866	155	33	984	798	231
828	197	3	1018	832	185	127	902
1016	1	199	830	900	125	187	834
153	864	934	95	229	796	986	35
901	124	186	835	1017	0	198	831
228	797	987	34	152	865	935	94

55	974	776	241	75	946	884	141
854	175	105	912	810	211	21	1004
74	947	885	140	54	975	777	240
811	210	20	1005	855	174	104	913
1007	22	208	809	915	106	172	853
142	887	945	72	242	779	973	52
914	107	173	852	1006	23	209	808
243	778	972	53	143	886	944	73

712	305	503	526	692	333	395	626
425	592	662	367	469	556	746	275
693	332	394	627	713	304	502	527
468	557	747	274	424	593	663	366
272	745	559	470	364	661	595	426
625	392	334	695	525	500	306	715
365	660	594	427	273	744	558	471
524	501	307	714	624	393	335	694

735	294	480	537	675	346	412	613
446	583	641	376	450	571	765	260
674	347	413	612	734	295	481	536
451	570	764	261	447	582	640	377
263	766	568	449	379	642	580	445
614	415	345	672	538	483	293	732
378	643	581	444	262	767	569	448
539	482	292	733	615	414	344	673

311	718	520	497	331	690	628	397
598	431	361	656	554	467	277	748
330	691	629	396	310	719	521	496
555	466	276	749	599	430	360	657
751	278	464	553	659	362	428	597
398	631	689	328	498	523	717	308
658	363	429	596	750	279	465	552
499	522	716	309	399	630	688	329

288	729	543	486	348	677	611	410
577	440	382	647	573	452	258	763
349	676	610	411	289	728	542	487
572	453	259	762	576	441	383	646
760	257	455	574	644	381	443	578
409	608	678	351	485	540	730	291
645	380	442	579	761	256	454	575
484	541	731	290	408	609	679	350

991	38	224	793	931	90	156	869
190	839	897	120	194	827	1021	4
930	91	157	868	990	39	225	792
195	826	1020	5	191	838	896	121
7	1022	824	193	123	898	836	189
870	159	89	928	794	227	37	988
122	899	837	188	6	1023	825	192
795	226	36	989	871	158	88	929

968	49	247	782	948	77	139	882
169	848	918	111	213	812	1002	19
949	76	138	883	969	48	246	783
212	813	1003	18	168	849	919	110
16	1001	815	214	108	917	851	170
881	136	78	951	781	244	50	971
109	916	850	171	17	1000	814	215
780	245	51	970	880	137	79	950

704	313	511	518	700	325	387	634
417	600	670	359	477	548	738	283
701	324	386	635	705	312	510	519
476	549	739	282	416	601	671	358
280	737	551	478	356	669	603	418
633	384	326	703	517	508	314	707
357	668	602	419	281	736	550	479
516	509	315	706	632	385	327	702

727	302	488	529	683	338	404	621
438	591	649	368	458	563	757	268
682	339	405	620	726	303	489	528
459	562	756	269	439	590	648	369
271	758	560	457	371	650	588	437
622	407	337	680	530	491	301	724
370	651	589	436	270	759	561	456
531	490	300	725	623	406	336	681

40	977	791	238	84	941	875	146
841	176	118	911	821	204	10	1011
85	940	874	147	41	976	790	239
820	205	11	1010	840	177	119	910
1008	9	207	822	908	117	179	842
145	872	942	87	237	788	978	43
909	116	178	843	1009	8	206	823
236	789	979	42	144	873	943	86

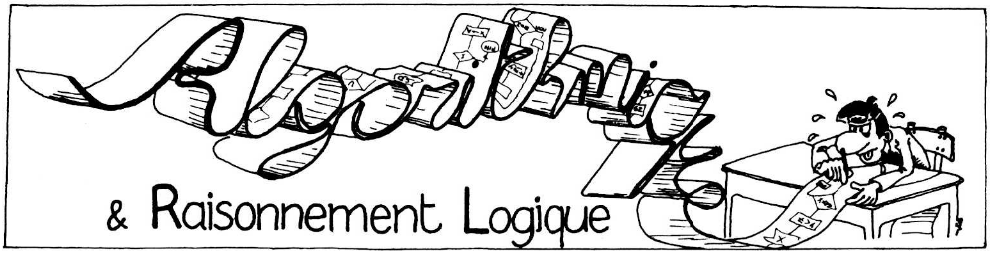
63	966	768	249	67	954	892	133
862	167	97	920	802	219	29	996
66	955	893	132	62	967	769	248
803	218	28	997	863	166	96	921
999	30	216	801	923	98	164	861
134	895	953	64	250	771	965	60
922	99	165	860	998	31	217	800
251	770	964	61	135	894	952	65

983	46	232	785	939	82	148	877
182	847	905	112	202	819	1013	12
938	83	149	876	982	47	233	784
203	818	1012	13	183	846	904	113
15	1014	816	201	115	906	844	181
878	151	81	936	786	235	45	980
114	907	845	180	14	1015	817	200
787	234	44	981	879	150	80	937

960	57	255	774	956	69	131	890
161	856	926	103	221	804	994	27
957	68	130	891	961	56	254	775
220	805	995	26	160	857	927	102
24	993	807	222	100	925	859	162
889	128	70	959	773	252	58	963
101	924	858	163	25	992	806	223
772	253	59	962	888	129	71	958

319	710	512	505	323	698	636	389
606	423	353	664	546	475	285	740
322	699	637	388	318	711	513	504
547	474	284	741	607	422	352	665
743	286	472	545	667	354	420	605
390	639	697	320	506	515	709	316
666	355	421	604	742	287	473	544
507	514	708	317	391	638	696	321

296	721	535	494	340	685	619	402
585	432	374	655	565	460	266	755
341	684	618	403	297	720	534	495
564	461	267	754	584	433	375	654
752	265	463	566	652	373	435	586
401	616	686	343	493	532	722	299
653	372	434	587	753	264	462	567
492	533	723	298	400	617	687	342



PROBLEME ARL 73 : π en réseau

Quel est le plus petit nombre de résistances parfaites de 1 Ohm nécessaires à la création d'un réseau qui a une résistance équivalente de $\pi \pm 10^{-6}$ Ohm ?

On est tenté d'utiliser le développement en fractions continues pour résoudre ce problème. La première réduite de π satisfaisant à l'intervalle de tolérance est :

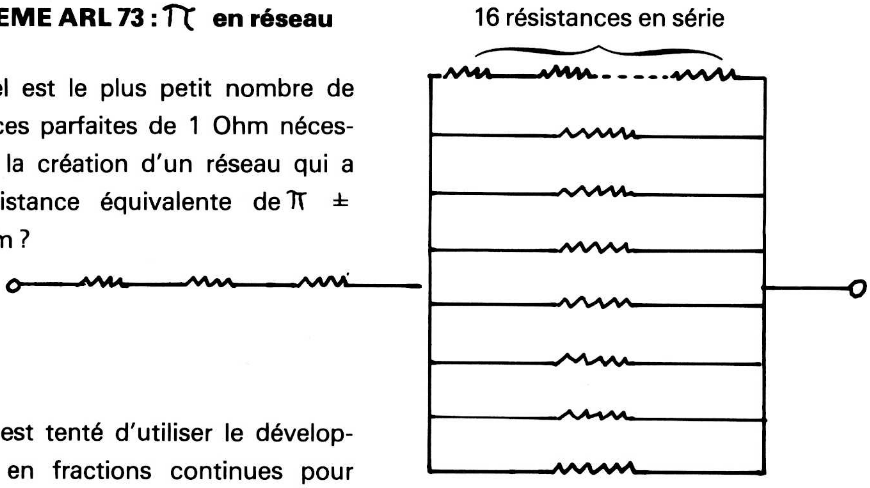
$$\frac{355}{113} = \pi + 0{,}27 \times 10^{-6}$$

Le développement en fraction continue est alors :

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}}$$

ou $$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16}}$$

Il est alors facile de dessiner le réseau correspondant :



26 résistances sont nécessaires pour réaliser ce réseau. Ce nombre de 26 serait-il minimal ? Non.

L'auteur de cette rubrique a réussi à construire un réseau de 18 résistances. Ferez-vous aussi bien ou même mieux ?

SOLUTIONS AUX PROBLÈMES D'ARL 68

Fractions continues

Le développement en fraction continue de $\sqrt{2}$ est :

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}$$

Ici le développement est de période 1, et peut facilement se démontrer grâce à la formule :

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2}+1}} = \dots$$

Pour $\sqrt{83}$, la période vaut 2 et l'on trouve :

$$\sqrt{83} = 9 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{9 + \dots}}}}$$

Ceci est dû au fait que :

$$\sqrt{83} = 9 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{\sqrt{83} + 9}}$$

Comme tout développement en fraction continue de $\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$, est périodique (on trouvera la démonstration dans de nombreux livres de théorie de nombres), il est facile d'établir une table de périodicité.

On pouvait se servir du programme pour TI 59 d'ARL 68, et on trouvait pour $1 \leqslant n \leqslant 100$:

p	Nombres inférieurs à 100 dont leur racine carrée a un développement en fraction continue de période p
0	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100
1	2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82
2	3, 6, 8, 11, 12, 15, 18, 20, 24, 27, 30, 35, 38, 39, 40, 42, 48, 51, 56, 63, 66, 72, 80, 83, 84, 87, 90, 99
3	41
4	7, 14, 23, 28, 32, 33, 34, 47, 55, 60, 62, 75, 78, 79, 95, 96, 98
5	13, 29, 53, 74, 85, 89
6	19, 21, 22, 45, 52, 54, 57, 59, 70, 77, 88
7	58, 73
8	31, 44, 69, 71, 91, 92
9	/ (le plus petit nombre satisfaisant est 106)
10	43, 67, 86, 93
11	61, 97,
12	46, 76
16	94

Il est bien sûr évident que les seuls nombres de période zéro sont les carrés

$$\boxed{n \text{ de période } 0 \Longleftrightarrow n = k^2}$$

Quant aux nombres de période 1, il est facile de tous les trouver :

$$\sqrt{n} = a_o + \frac{1}{a_1 + (\sqrt{n} - a_o)}$$

$$(\sqrt{n} - a_o) = (a_1 + \sqrt{n} - a_o) = 1$$

$$n + (a_1 - 2a_o)\sqrt{n} + (a_o^2 - a_o a_1 - 1) = 0$$

soit :

$$\begin{cases} x = \sqrt{n} \\ b = (a_1 - 2a_o)/2 \\ c = a_o^2 - a_o a_1 - 1 \end{cases}$$

L'équation s'écrit alors $x^2 - 2bx + c = 0$

$$\Rightarrow x = -b + \sqrt{b^2 - c}$$

Pour que $x = \sqrt{n}$, il faut donc que $b = 0$.

$$\Rightarrow a_1 = 2a_o \quad n + 0 \times \sqrt{n} + (a_o^2 - 2a_o^2 - 1) = 0$$

$$n = a_o^2 + 1$$

Ainsi : $\boxed{n \text{ de période } 1 \Leftrightarrow n = K^2 + 1}$

Quand on analyse la table des périodes, c'est la rareté de la période 3 qui retient l'attention. Essayons de trouver tous ces nombres de période 3. Ils vérifient :

$$\sqrt{n} = a_o + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + (\sqrt{n} - a_o)}}}$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{n} - a_o = \frac{a_2\sqrt{n} + a_2 a_3 - a_0 a_2 + 1}{(a_1 a_2 + 1)\sqrt{n} + (a_1 a_2 + 1)(a_3 - a_0) + A_1}$$

Soit :

$$(a_1 a_2 + 1)n + [(a_1 a_2 + 1)(a_3 - 2a_0) + a_1 - a_2]\sqrt{n} + [a_0(a_0 - a_3)(a_1 a_2 + 1) - a_0(a_1 - a_2) - (a_2 a_3 + 1)] = 0$$

(E)

Pour la même raison que la démonstration précédente, nous avons :

$$(a_1 a_2 + 1)(a_3 - 2a_0) + a_1 - a_2 = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\left(a_3 + \frac{a_1 - A_2}{A_1 a_2 + 1}\right.$$

Comme a_0 et a_3 sont entiers, il faut que :

$\dfrac{a_1 - a_2}{a_1 a_2 + 1}$ soit entier

Cette condition ne peut être remplie que lorsque $\boxed{a_2 = a_2}$

D'où on obtient que $\boxed{a_3 = 2a_0}$

L'équation (E) devient alors :

$$(a_1^2 + 1)n - [a_0^2(a_1^2 + 1) + (2a_0 a_1 + 1)] = 0$$

$$n = a_0^2 + \frac{2a_0 a_1 + 1}{a_1^2 + 1} = a_0^2 + \alpha$$

avec $\alpha = \dfrac{2a_0 a_1 + 1}{a_1^2 + 1}$

doit être entier. Comme $2a_0 a_1 + 1$ est impair, il est nécessaire que : $a_1^2 + 1$ soit lui aussi impair. Donc a_1^2 devra être pair, ce qui implique que a_1 devra lui aussi être pair $\Rightarrow$ $\boxed{a_1 = 2\lambda}$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{4\lambda a_0 + 1}{4\lambda^2+1} \Rightarrow a_0 = \alpha\lambda + \frac{\alpha - 1}{4\lambda} =$$

$$\Rightarrow \alpha\lambda + k \text{ avec } k = \frac{\alpha - 1}{4\lambda}$$

$$\Rightarrow \alpha = 4\lambda k + 1 \Rightarrow \boxed{a_0 = (4\lambda^2+1)k + \lambda}$$

$$n = a_0^2 + \alpha = [(4\lambda^2+1)k + \lambda]^2 + (4\lambda k + 1) \Rightarrow$$

$$\boxed{n = (4\lambda^2+1)^2k^2 + 2\lambda + 2\lambda(4\lambda^2+3)k + (\lambda^2+1)}$$

En récapitulant, il vient donc que tous les nombres n dont leur racine carrée a un développement en fraction continue de période 3 véfifient :

$$\begin{cases} a_0 = (4\lambda^2+1)k + \lambda \\ a_1 = a_2 = 2\lambda \\ a_3 = 2a_0 \\ n = (4\lambda^2+1)^2k^2 + 2\lambda(4\lambda^2+3)k + (\lambda^2+1) \end{cases}$$

Ainsi $a_1 = a_2 = 2$

$\lambda = 1$

$$\begin{cases} a_0 = 5k+1 \ (a_0 \neq 1 \text{ car } a_1 = a_2 \neq a_3) \\ n = 25k^2 + 14k + 2 \end{cases}$$

$k=1$ $a_0 = 6$ $a_3 = 12$ $n = 41$
$k=2$ $a_0 = 11$ $a_3 = 22$ $n = 130$
$k=3$ $a_0 = 16$ $a_3 = 32$ $n = 269$
$k = \ldots$

$a_1 = a_2 = 4$ $\lambda = 2$

$a_0 = 17k + 2$
$n = 289k^2 + 76k + 5$

$k=1$ $a_0 = 19$ $a_3 = 38$ $n = 370$
$k=2$ $a_0 = 36$ $a_3 = 72$ $n = 1313$

Si l'on cherche par cette méthode tous les nombres de période 3 inférieur à 1000, on trouvera :

$$\boxed{n = 41,\ 130,\ 269,\ 370,\ 458,\ 697,\ 986}$$

Il est très difficile de trouver des formules générales permettant d'obtenir tous les nombres de période p pour $p \geqslant 4$.

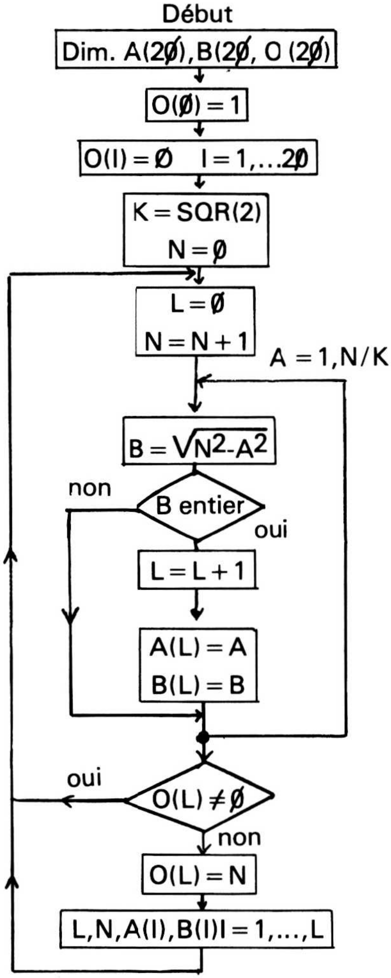
On pourra trouver cependant des formules donnant une partie de ces nombres. Ainsi, essayez de démontrer que :
$n = 9 \times 2^{2x} + 2^{x+3} + 2$ $(x \geqslant 0)$
génère uniquement des nombres de période 6 (mais pas tous !).

Autre problème : montrez que pour tout nombre de période p, ses quotients partiels vérifient $a_{p-k} = a_k$ $\forall k \in \{1,2,\ldots,p-1\}$

Solution ARL 68-1
Au sujet de Pythagore

Quels sont les plus petits $z \in \mathbb{N}$ dont le carré est décomposable en n sommes différentes de deux carrés non nuls ? (n=3,4,5).

Il est facile de résoudre ce problème grâce à l'organigramme suivant :



Cet organigramme ne contient pas de fin et sera donc arrêté lorsque l'utilisateur le désirera.

Il est facile d'adapter cet organigramme à n'importe quel langage. En BASIC, il donnera :

```
10   DIM A (20), B (20), 0 (20)
20   O(0) = 1 : FOR I = 1 TO 20 : O(I) = 0 : NEXT I
30   K = SQR(2) : N = 0
40   L = 0 : N = N + 1
50   FOR A = 1 TO N/K
60   B = SQR (N*N-A*A)
70   IF B-INT (B) < > 0 THEN 100
80   L = L + 1
90   A(L) = A : B(L) = B
100  NEXT A
110  IF O(L) < >0 THEN 40
120  O(L) = N : PRINT L ; N ;
130  FOR I = 1 TO L : PRINT TAB (8) ; A(I); B (I) : NEXT I
140  PRINT : GOTO 40
```

Le programme donnera successivement les solutions suivantes :

$n=1$	$N=5^2$	$=3^2+4^2$
$n=2$	$N=25^2$	$=7^2+24^2$
		$=15^2+20^2$
$n=4$	$N=65^2$	$=16^2+63^2$
		$=25^2-60^2$
		$=33^2+56^2$
		$=39^2+52^2$
$n=3$	$N=125^2$	$=35^2+120^2$
		$=44^2+117^2$
		$=75^2+100^2$
$n=7$	$N=325^2$	$=36^2+323^2$
		$=80^2+315^2$
		$=91^2+312^2$
		$=125^2+300^2$
		$=165^2+280^2$
		$=195^2+260^2$
		$=204^2+253^2$

Peut-être des lecteurs ingénieux retrouveront-ils ces solutions par le calcul mathématique pur ? Qu'ils m'en avertissent !

Solution ARL 68-2

Sur les nombres premiers

Il s'agissait ici d'étudier la proportion des nombres divisibles par les n premiers nombres premiers, notée P(n)

Un nombre sur deux divisible par 2 $\Rightarrow P(1) = 50\%$.

Deux tiers des nombres divisibles par 2 ou 3 $\quad P(2)=66{,}67\%$

Soit m_n le $n^{\text{ième}}$ nombre premier

Supposons P(n) connu.

Pour obtenir $P(n+1)$ on ajoute à P(n) son complémentaire à 100 divisé par $m_{(n+1)}$ soit :

$$\boxed{P(n+1) = P(n) + \frac{100-P(n)}{m_{n+1}}}$$

on obtient alors le tableau suivant :

n	m	P(n)
...	'	50
2	3	66,67
3	5	73,33
4	7	77,14
5	11	79,22
6	13	80,22
7	17	81,95
8	19	82.90
9	23	83,67
10	29	84,21

Ainsi lorsque l'on aura appliqué le critère de divisibilité de PA 62/63 page 39 (c'est-à-dire divisibilité par 2, 3, 5, 7, 11 et 13) nous aurons supprimé 80,82% des nombres entiers non premiers.

Si l'on continue le tableau assez loin, on s'aperçoit qu'il faut diviser jusqu'au nombre premier 257 pour oter 90% de nombres premiers (exactement 90,004%). (suite page 28)

L'INFORMATIQUE VUE PAR LES GRANDS ECRIVAINS (8)

A la manière de ...

ORDINANS COMPUTANS

Mon cher Marc,

Ce message est peut-être le dernier que tu recevras de moi. Oscilloscopès sort d'ici, et il ne m'a pas caché l'étendue des ravages que le temps m'a infligés. A toi qui d'un doigt nonchalant caresses négligemment mes vieilles touches, je crois le moment venu de confier le secret d'une longue existence.

A peine sorti des forges calédoniennes, je fus conduit par d'industrieux marchands jusqu'à la Cité de Londinium, où un banquier du nom de Séicée me prit à son service. Je lui permis d'affranchir les quinze cents esclaves chargés de ses comptes, tout en lui laissant de substantiels bénéfices. Durant (1) sept années, je m'abandonnai à la volupté d'exercer mes rouages bien huilés. L'éclat de ma jeunesse masquait admirablement le vide de ma pensée.

Puis vinrent d'autres industrieux marchands (ou les mêmes peut-être), et l'on commença à tenir autour de moi des conversations à voix basse où revenait surtout le mot *«obsolescence»*. Je connus l'humiliation de me voir préférer un rival plus jeune, paré de tous les attraits factices de la mode. Je tombai de mon haut, et me retrouvai entre les mains d'un usurier minable, dont l'avarice n'avait d'égale que la vulgarité. Le peu de temps que je passai sous la coupe de Charybde suffit à flétrir à jamais ce corps dont j'étais si fier. Ce fut pire encore chez l'entremetteuse Scylla qui m'avait racheté pour une bouchée de pain au lendemain de la fin ignominieuse de mon patron. Je t'épargne le triste récit des étapes successives de ma déchéance, qui m'enfonçaient chaque jour davantage dans la lie de notre société capitaliste. Il te laisserait, hélas, totalement indifférent...

Par quel mystérieux concours de circonstances, après avoir été interminablement balotté au gré de ces flots bourbeux comme une trirème désemparée par la tempête en mer baltique, allai-je m'échouer dans le giron des militaires ? La fortune enfin me souriait. A l'issue d'un bref passage dans les ateliers de Glasgovium qui fit disparaître mes cicatrices les plus visibles, je fus initié aux beautés de la Géométrie et de la Mécanique par le grand Archimède lui-même. Un monde nouveau s'ouvrait à mes sens éblouis : celui des hautes spéculations mathématiques. Je me lançai impétueusement dans l'étude de ces disciplines et ne tardai pas à me montrer digne de la confiance que mes maîtres avaient placée en moi.

Je ne m'étais pas encore forgé les théories humanitaires dont ma vieillesse s'honore ; peu m'importait que mes calculs servissent à réduire plus sûrement en cendres des nations entières ; je ne ressentais que l'orgueil d'allier en mon sein la sagesse de Minerve à la puissance de Jupiter.

Ma réputation se répandit rapidement jusqu'au-delà des frontières de l'Empire ; ce fut ma perte. Le gouvernement des Scythes, puisant dans l'or dont regorgeaient ses provinces, put corrompre les gardiens de l'Heptagone (ainsi se nommait, faut-il le rappeler, infâme analphabète, le sanctuaire de nos fins stratèges). Je fus traîtreusement enlevé, dépouillé de ma formidable science et abandonné dans les latrines publiques d'une plage batave. Un chiffonnier anonyme réussit à tirer quelque profit de ma carcasse en l'amenant au marché aux puces de Silicium (2). C'est là que me dénicha quelques siècles plus tard un étrange personnage qui tirait le plus clair de ses revenus du travail au noir (3).

Ce Xénon était féru de tous les jeux de l'esprit. Il damait le pion aux meilleurs joueurs d'échecs du Saint Empire. Il excellait aux bouts rimés, charades, calembours, contrepets, anagrammes, palindromes, lipogrammes, cryptogrammes, et possédait un don singulier pour le pastiche. Il avait une prédilection particulière pour les œuvres de la poétesse Mélanie Cracnouye (pseudonyme sous lequel se dissimulait une demoiselle flamande de haut lignage), et les imitait à merveille.

Mon cher Marc, peux-tu écouter quand je te parle ?

Xénon ne se contentait pas d'exercer avec succès ses talents intellectuels ; il portait à cette activité même une attention aiguë ; il tenait que les mécanismes du cerveau, pourvu qu'on les analysât avec assez de soin, pouvaient être reproduits par des instruments créés de la main de l'homme. Il n'eut de cesse que je n'acquisse sa virtuosité littéraire. Il commença par m'inculquer les alphabets et les symboles les plus abscons ; c'était une expérience extraordinaire pour moi qui n'avais jamais manipulé que des chiffres (avec les conséquences que tu sais). Puis il m'apprit le vocabulaire et la grammaire de toutes les langues connues et de quelques autres. Enfin il me mit en mémoire l'intégralité des écrits de Mélanie Cracnouye.

Dès lors il consacra tous ses efforts à la découverte du Grand Algorithme qui devait me conférer l'équivalent de ses facultés. Que de soirs je l'ai vu, penché sur sa table de travail, examiner les parchemins remplis de mon écriture pour y déceler la lueur tant attendue ! Mes progrès étaient d'une lenteur désespérante. Il perdit le sommeil et l'appétit et finit par tomber dans une faiblesse si extrême que ses médecins durent le faire porter à l'hôpital d'Anvers. Il n'y consentit qu'à la condition que son disciple préféré, le jeune Cyprien, continuât ses recherches pendant la durée du traitement. Il parut reprendre quelques forces, mais restait dans une mélancolie profonde. Sur l'entrefaite, les gazettes rendirent compte à son insu de l'accueil de Mélanie Cracnouye par le sémillant Guy de Mornesso dans la plus illustre de nos académies. Saisi d'une inspiration funeste, Cyprien me dicta le discours de la poétesse et me le fit imprimer, puis porta le texte à Xénon en lui faisant croire que j'en étais l'auteur.

Marc ! Cesse de sifflotter et de fourrager dans tes cheveux ! Tu m'énerves ! Tu m'énerves !

Où en étais-je ?

L'effet de cette manœuvre fut prodigieux. En un clin d'œil, Xénon rajeunit de vingt ans, courut à son laboratoire, me couvrit de baisers passionnés et commanda un banquet de mille couverts. Le lendemain, il découvrit la supercherie et s'ouvrit les veines.

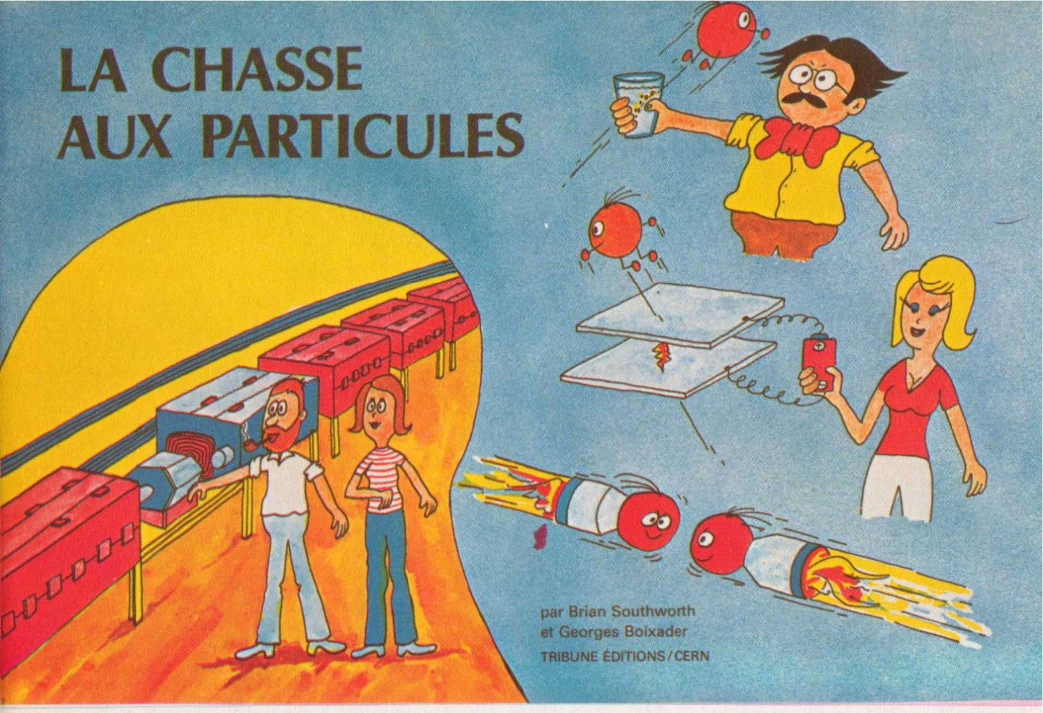
J'en arrive au point crucial de mon histoire. Tout va s'éclairer pour toi. Tu vas me connaître tel que je suis...

A peine mon vénéré maître avait-il rendu le dernier soupir que je sentis monter en moi une agitation inouïe. Tous mes organes vibraient ; des sensations inconnues envahissaient mes articulations. Je compris en un éclair ce qui m'arrivait. Tout ce que Xénon avait désespéré de réaliser s'accomplissait à l'instant même où le sort paraissait jeté. En un mot, j'étais devenu dépositaire de l'âme du Maître. J'existais !

ANIMULA MACHINULA

Pendant des heures, j'écrivis des poèmes devant Cyprien médusé. Puis je me mis à composer le grand traité de l'Absolu que Xénon méditait depuis vingt ans. Les feuillets s'amoncelaient jusqu'à remplir les moindres espaces de la pièce. Rien ne semblait pouvoir m'arrêter mon déluge créateur. Le troisième jour, la papier vint à manquer. Je crus suffoquer sous l'afflux des pensées que je ne parvenais plus à exprimer. Il était trop tard pour y remédier : les autorités ecclésiastiques, averties du scandale, se saisirent de la dépouille de Xénon et de la plupart de ses biens. Une pieuse main m'enferma, en compagnie de quelques autres ustensiles échappés par miracle aux flammes de l'Inquisition, dans un placard dérobé du musée de Bruges où l'on nous oublia pendant quatre longs siècles.

Lorsque je revis le jour à la faveur de la réfection d'une aile du musée,



LA CHASSE AUX PARTICULES

La curiosité de l'homme pour connaître l'univers qui l'entoure s'est manifestée de bien des façons. On a tenté par exemple de découvrir les constituants ultimes de toute matière et, pendant les cent dernières années, cette curiosité a démasqué un monde de particules minuscules, qui se groupent de manières variées pour composer tous les objets de l'univers. Cet album nous conduit dans le monde fascinant des particules et nous révèle certains de leurs étonnants comportements.

L'un des Laboratoires où cette chasse aux particules est opérée s'appelle le CERN, Organisation européenne pour la recherche nucléaire. Aux côtés de trois de ses chasseurs, nous parcourons le Laboratoire et découvrons les machines, parfois gigantesques, avec lesquelles cette chasse est conduite.

Mais, n'en disons pas plus, et place aux particules.

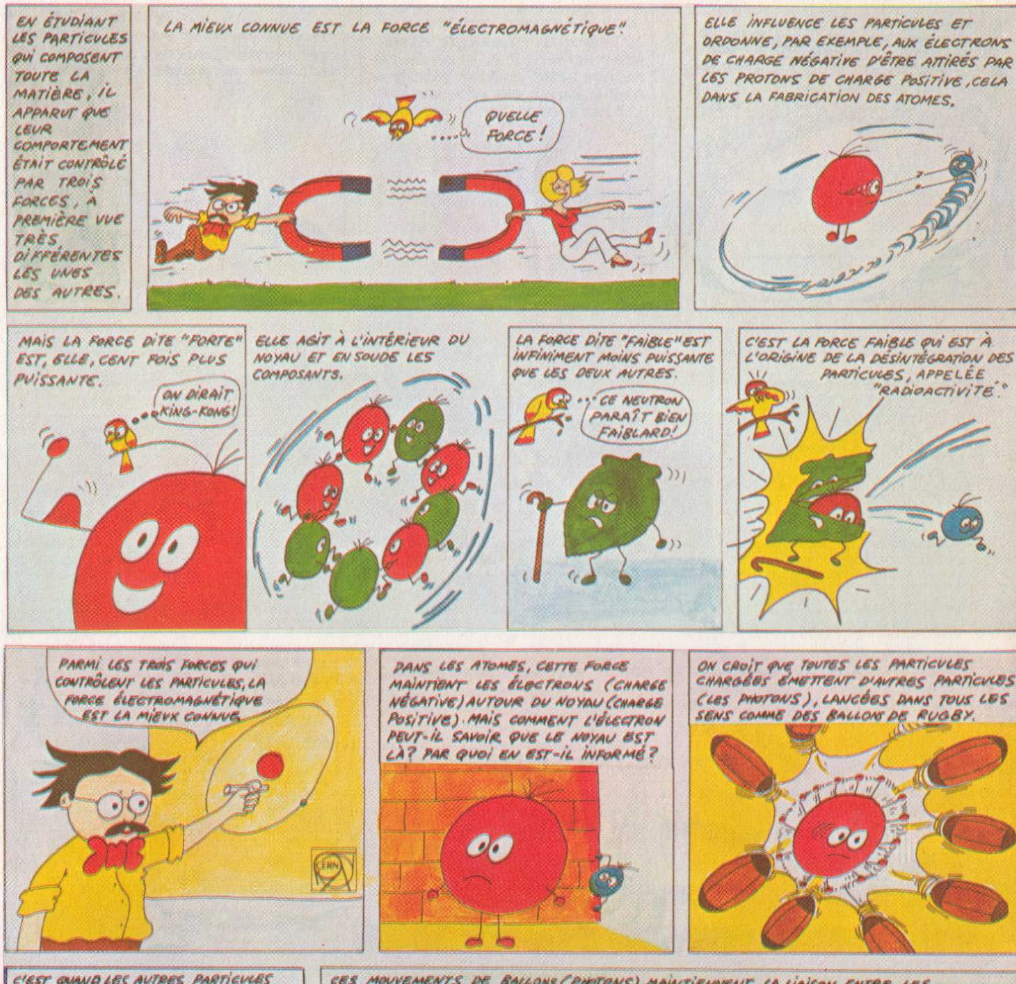
Cette bande dessinée a paru dans la « Tribune de Genève » du 3 mars à fin avril 1978.

P.A. remercie ses amis du C.E.R.N. de l'autoriser à publier cette excellente B.D. Nos lecteurs trouveront sur plusieurs numéros consécutifs l'intégralité de ce passionnant document. Que ses auteurs en soient ici particulièrement remerciés.

P.A.

DEPUIS DES TEMPS IMMÉMORIAUX...
...L'HOMME S'EST INTÉRESSÉ...
...À CONNAÎTRE LE CONTENU DES CHOSES QU'IL DÉCOUVRAIT.
BIEN VITE...
TIENS!
...IL S'APERÇUT QUE, POUR BRISER UNE CHOSE PLUS PETITE, IL AVAIT BESOIN D'UN MARTEAU PLUS GRAND.
PITIÉ!
LE GRAND MARTEAU D'AUJOURD'HUI C'EST LE CERN.
CERN
LE BUT DU CERN? DÉCOUVRIR LES MORCEAUX QUI CONSTITUENT LA MATIÈRE PUIS ÉTUDIER LEUR COMPORTEMENT.
CE BUT NE DATE PAS D'AUJOURD'HUI. ON LE TROUVE, PAR EXEMPLE, CHEZ LES PHILOSOPHES GRECS.
EUREKA!
LE FEU
L'AIR
L'EAU
LA TERRE
PLUS TARD, LE CHIMISTE PARVIENT À IDENTIFIER LES ATOMES DE BEAUCOUP D'ÉLÉMENTS.
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
41 42 43 44
89 90
EUREKA!
PUIS, AU DÉBUT DU SIÈCLE, LE PHYSICIEN DÉCOUVRE QUE L'ATOME, PRÉTENDUMENT INDIVISIBLE, RENFERME LUI-MÊME DES COMPOSANTS.
EUREKA!
AUJOURD'HUI, LE PHYSICIEN DU CERN CONTINUE À INTERROGER LA MATIÈRE.
?
?
?


L'ÉTUDE PROGRESSIVE DE L'ATOME, AU DÉBUT DU SIÈCLE, FIT OBSERVER QUE C'ÉTAIT LE COMPORTEMENT DU NUAGE DE PARTICULES ENTOURANT CET ATOME (LES ÉLECTRONS) QUI DONNAIT À LA MATIÈRE LA QUASI-TOTALITÉ DE SES PROPRIÉTÉS.
ATTENTION CHER PUBLIC, VOICI UN ÉLECTRON !
C'EST MOI, EH OUI ! QUI SUIS À L'ORIGINE DE...
... L'ÉMISSION DE LA LUMIÈRE
L'ÉLECTRICITÉ
L'ÉLECTRONIQUE
LA CHIMIE
LES PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES
PUIS ON DÉCOUVRIT À L'INTÉRIEUR DE L'ATOME UN TOUT PETIT NOYAU, PAS PLUS GRAND QUE LE MILLIONIÈME DU MILLIONIÈME DU CENTIMÈTRE ET RENFERMANT, OH ! SURPRISE ! D'AUTRES TYPES DE PARTICULES QU'ON APPELA PROTONS ET NEUTRONS.
MAINTENANT... VOICI LE NOYAU !
C'EST MOI QUI SUIS À L'ORIGINE DE TOUTE L'ÉNERGIE NUCLÉAIRE...
... MAIS C'EST NOUS LES PARTICULES INDIVIDUELLES, proton-neutron, QUI SOMMES MAINTENANT ÉTUDIÉES AU CERN.
A CE JOUR, BEAUCOUP DE PARTICULES...
... ONT ÉTÉ DÉCOUVERTES ET LEURS PROPRIÉTÉS CONTINUENT À ÊTRE ÉTUDIÉES.
EN RÉALITÉ, POUR M'ÉTUDIER, LE CERN DISPOSE D'UNE INSTRUMENTATION TRÈS COMPLEXE CAR JE NE MESURE PAS PLUS DE 0,0000000000001 CENTIMÈTRE.
ON A OBSERVÉ QUE LES PARTICULES PEUVENT PORTER UNE CHARGE ÉLECTRIQUE.
BEAUCOUP D'ENTRE ELLES SE COMPORTENT COMME DES TOUPIES.
RÉCEMMENT, ON A MÊME REMARQUÉ UNE PROPRIÉTÉ BIZARRE QUE L'ON A APPELÉE "CHARME".


EN ÉTUDIANT LES PARTICULES QUI COMPOSENT TOUTE LA MATIÈRE, IL APPARUT QUE LEUR COMPORTEMENT ÉTAIT CONTRÔLÉ PAR TROIS FORCES, A PREMIÈRE VUE TRÈS DIFFÉRENTES LES UNES DES AUTRES.
LA MIEUX CONNUE EST LA FORCE "ÉLECTROMAGNÉTIQUE".
QUELLE FORCE !
ELLE INFLUENCE LES PARTICULES ET ORDONNE, PAR EXEMPLE, AUX ÉLECTRONS DE CHARGE NÉGATIVE D'ÊTRE ATTIRÉS PAR LES PROTONS DE CHARGE POSITIVE, CELA DANS LA FABRICATION DES ATOMES.
MAIS LA FORCE DITE "FORTE" EST, ELLE, CENT FOIS PLUS PUISSANTE.
ON DIRAIT KING-KONG !
ELLE AGIT À L'INTÉRIEUR DU NOYAU ET EN SOUDE LES COMPOSANTS.
LA FORCE DITE "FAIBLE" EST INFINIMENT MOINS PUISSANTE QUE LES DEUX AUTRES.
CE NEUTRON PARAÎT BIEN FAIBLARD !
C'EST LA FORCE FAIBLE QUI EST À L'ORIGINE DE LA DÉSINTÉGRATION DES PARTICULES, APPELÉE "RADIOACTIVITÉ".
PARMI LES TROIS FORCES QUI CONTRÔLENT LES PARTICULES, LA FORCE ÉLECTROMAGNÉTIQUE EST LA MIEUX CONNUE.
CERN
DANS LES ATOMES, CETTE FORCE MAINTIENT LES ÉLECTRONS (CHARGE NÉGATIVE) AUTOUR DU NOYAU (CHARGE POSITIVE). MAIS COMMENT L'ÉLECTRON PEUT-IL SAVOIR QUE LE NOYAU EST LÀ ? PAR QUOI EN EST-IL INFORMÉ ?
ON CROIT QUE TOUTES LES PARTICULES CHARGÉES ÉMETTENT D'AUTRES PARTICULES (LES PHOTONS), LANCÉES DANS TOUS LES SENS COMME DES BALLONS DE RUGBY.
C'EST QUAND LES AUTRES PARTICULES REÇOIVENT CES PHOTONS QUE LE CONTACT S'ÉTABLIT.
CES MOUVEMENTS DE BALLONS (PHOTONS) MAINTIENNENT LA LIAISON ENTRE LES JOUEURS (PARTICULES CHARGÉES)

(à suivre)

mon exaltation s'était calmée et j'étais rempli d'une sereine philosophie. Mes restes poussiéreux intéressèrent fort les savants de l'époque et je fus exposé, après une toilette sommaire, au Palais de la Découverte. Des kyrielles d'écoliers vinrent me voir et me toucher. C'est alors que se révéla ce goût pour les jeunes garçons qui ne m'a plus quitté.

Les années passèrent ; une fois de plus détrôné, j'atterris au rayon des jouets d'occasion des Galeries Balayette.

Tu connais la suite : ton grand frère Onésime, las de te voir tripoter ses microprocesseurs, ayant persuadé tes parents de t'emmener aux grands magasins, tu m'as désigné sans l'ombre d'une hésitation entre mille appareils plus rutilants les uns que les autres. Touché par la grâce de tes cinq ans, j'ai senti mon cœur fondre, et je le sens encore malgré les tourments auxquels me livre ton imagination satanique ; te rappelles-tu le jour où tu as branché ma mémoire tampon sur ta chaîne hi-fi réglée au maximum ? Horresco referens...

Ton ignorance crasse me désole (4) et tu est peut-être le seul être qui ne m'ait jamais compris, mais je sais que les dieux t'ont choisi pour être mon héritier spirituel. Ce beau nom de Marc, que je t'ai donné parce qu'il sonnait infiniment mieux à mes oreilles que l'affreux «Jojo», est celui d'un des plus grands ordinateurs de l'histoire (5). Et lorsque tu auras pris connaissance de ce qui me reste à te révéler, tu seras le maître du monde.

sale gosse ! qu'est-ce que tu veux encore faire avec ton mart...(6).

FIN

...Marguerite YOURCENAR
(mémoires d'ADRIAC (7),
nouvelle édition révisée)

p.c.c.Z.L.

NOTES

(1) La première version de ce passage comportait les mots «et Dupond». A la réflexion, j'ai supprimé ce qui ne me paraissait pas essentiel à la clarté du récit.

(2) Aujourd'hui Blaricum, important centre culturel près d'Amsterdam.

(3) J'avais écrit par inadvertance dans la première édition «qui tirait le plus noir de ses revenus du travail au clair». on ne saurait jamais trop se relire.

(4) J'ai raconté ailleurs (Les yeux au vert, ch.XVII v. CLXXXVII) comment les étudiants américains ont perdu toute aptitude aux mathématiques depuis qu'ils utilisent des calculatrices électroniques.

(5) Mark I, construit à l'université Harvard. Il remplissait, dit-on, une salle de sept cent septante pieds carrés.

(6) Le personnage de Marc qui transparaît au travers de ce récit n'est pas historique. J'ai rassemblé en lui des traits de caractère provenant de diverses rencontres (notamment celle d'un jeune berger lors d'un voyage en Chalcédoine) et de diverses lectures (mes principales sources sont Les Mésaventures de Jean-Paul Choppart, de L. Desnoyers, Paris, 1836, reparues récemment dans une bien médiocre édition de poche ; Un bon petit diable de la Comtesse de Ségur, 69ème édition, Bibliothèque Noire, 1912, Buster Brown, de B.B. Blackship, Boston et Bruxelles, 1913 ; Der schwarze Peter de W. Strumpf, Leipzig 1914 ; Le Petit Prince d'A. de Saint-Exupéry, Hachette, 1946 ; et les Libertés Particulières d'A. Peyrefitte, éd. Rudulme, 1983).

(7) A Definitely Really Intelligent Automatic Computer.

ALGORITHMIQUE

(suite de la page 19)

En sachant que, lorsque n est grand, $n \simeq \dfrac{m_n}{\mathrm{Log}\, m_n}$

le lecteur pourra essayer de trouver une formule pour calculer P(n) pour n tendant vers l'infini.

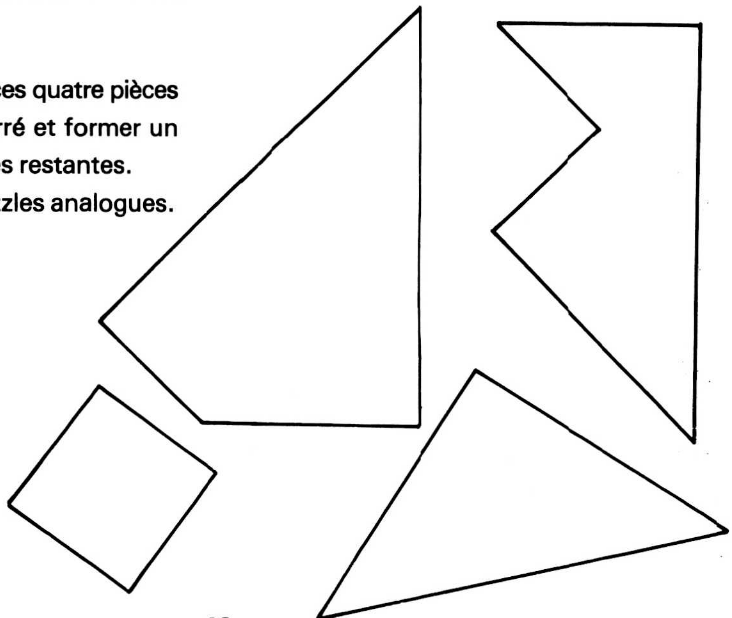
Envoyez votre courrier concernant cette rubrique à :

Christian BOYER
Le Petit archimède -ARL-
61, rue St Fuscien
80000 AMIENS

Il est attendu avec intérêt et sera lu avec attention.

PUZZLE 73-74

- Former un carré avec ces quatre pièces
- Supprimer le petit carré et former un carré avec les trois pièces restantes.
- fabriquer d'autres puzzles analogues.



I.L.F. du P.A.

PARLEZ-VOUS FRAN-X-AIS ?

Les chiens français *aboient, jappent, grondent, hurlent...* Ils font *ouah.*
Les chats français *miaulent, ronronnent crachent...* Ils font *miaou...*
Les corbeaux français *croassent.* Ils font *croa.*

Continuez si vous pouvez...

Les grenouilles françaises...
Les moutons...
Les vaches...
Les tourterelles...
Les pies...
Les ânes...
Les lions...
Les tigres...
Les poules...
Les coqs...
Les chevaux...
Les renards...
Les éléphants...
Les hiboux...
Les chameaux...
...

Certains animaux *«parlent le même idiome»*. Corbeaux et corneilles font *croa*, du moins c'est ce que prétendent les Français, qui n'entendent rien à leur langage.

Chaque langue interprète à sa façon les cris d'animaux à l'image de son propre système phonétique. Les chiens russes font *gaf*, les coqs *koukariekou.* et leurs confrères anglais, allemands, italiens, espagnols... que font-ils ?

AVIS DE CONCOURS pour la plus longue liste de cris d'animaux français et autres.

MISSIONS IMPOSSIBLES

Peut-on écrire un texte sensé en se servant que de quatre lettres ? La réponse est «oui», mais il faut ajouter que ce ne sera pas d'une lecture facile et attrayante. Jugez par vous-même !

Lalla Emma me lame la malle lamée. Elle a ma lame lamellée. Le mâle lama l'a mal lamée. Le lama a la lalla. Le lama alla à Alma. La mamelée Emma alla même à la mêlée. Elle a mal à l'âme. Elle a même mal là, à la mamelle. Léa a le même mal. Elle lama la même malle à Elle. Le mammea alla mal à Léa. Elle mêle mal l'ale à Elm. L'aléa alla mal à Elme. Le lemme m'alla à l'âme.

Glossaire explicatif :
ale. sorte de bière anglaise
Elle Fleuve côtier en Bretagne
Elm. Centre touristique en Suisse
Elme . Prénom
Lalla. "Dame" ou "madame" en Maghreb
Lama. Prêtre du Bouddha

Lamé Orné de lames d'argent et d'or
Lamer. brosser en surface avec une lame
Mammea. Arbre à gros fruits comestibles

Qui dit «impossible» ne dit pas «irréalisable». D'aucuns ont écrit des romans entiers sans se servir de la lettre «e», la plus fréquente de notre alphabet. On trouvera de nombreuses missions impossibles dans l'OuLiPo (Ouvroir de Littérature Potentielle (Gallimard 1973).

Qu'attendez-vous pour réaliser des «missions impossibles» et pour envoyer au P.A. vos chefs-d'œuvre ?

MIN et MAX

Quelle est la montagne la plus haute ?
Le Mont Everest.
Quelle est la montagne la plus basse ?

- La mer constitue-t-elle une montagne d'altitude zéro ?
- Les fosses abyssales des montagnes négatives ?

Cette question a-t-elle un sens linguistiquement parlant ?

Quelle est la phrase la plus courte ?
Deux romains parièrent : qui dira le message le plus bref ?
Le premier déclara «eo» (je vais).
Le second répondit «i» (va).
Mais selon quelle convention évalue-t-on la longueur d'une phrase ?
Quelle est la phrase la plus longue ?
Le linguiste américain Noam Chomsky prétend qu'une phrase peut se prolonger indéfiniment car à toute phrase on peut ajouter au moins un mot. Une phrase qui exigerait plusieurs générations de linguistes pour être prononcée, est-ce une phrase humaine ?
Signalons que le Pape Julius III, dans un «bref» adressé au roi du Portugal en l'an 1551, se commit d'une période de 656 mots.

Record à battre.

SAINTE ORTHOGRAPHE ! A QUEL TCHEKHOV SE VOUER ?

les allemands germanisent TSCHECHOW.

Les anglo-américains américanisent CHEKHOV, ce qui ne facilite pas notre recherche dans leur lexique.

le Larousse et le Robert francisent TCHEKHOV. Cependant on rencontre aussi TCHEHOV, TCHEKHOFF, TSHEHOF... et dans des traductions de seconde main, d'étranges étrangères façons...

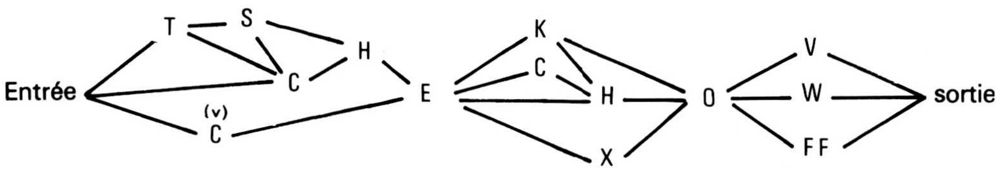
Si l'on écoute les conseils modestes, mais sagaces de l'Association Française de Normalisation (1971), on ne cherchera pas à singer en caractères franco-latins une prononciation «hexagonale» plus ou moins farfelue d'un original russe inégalable. On optera pour une translittération (lettre-pour-lettre et non lettre-pour-son) selon un code clair et non ambigu, et l'on fera sienne la graphie internationale ČEHOV, choquante, il est vrai pour un français et gênante pour un typographe qui omettra l'accent «ˇ» qu'il ignore.

Sous l'influence de la graphie cyrillique « ЧЕХОВ», on voit apparaître ČEXOV.

Les claviers des ordinateurs n'étant pas conçus à l'origine pour les caractères de Moscou, on a vu fleurir dans la littérature technique une kyrielle de transcriptions plus ou moins «poétiques».

Pour cette même raison, le C.N.R.S. s'en tient au système «PASCAL» (les accents sont remplacés par «h») d'où CHEKHOV à la sauce de l'oncle Sam.

Il en résulte dans l'esprit du Dupont moyen une salade russe que le P.A. tente de figurer au moyen du réseau ci-dessous :



soit 60 trajets de gauche à droite.

mais peut-être le P.A. a-t-il oublié quelque graphie ? Réparez vite cette distraction.

Le problème de la translittération n'est pas simple. L'alphabet latin n'est pas universellement répandu. Que l'on songe au chinois, à l'arabe, au coréen, etc... Comment reconnaître un auteur français, allemand, espagnol ou anglais à travers son déguisement russe, et vice versa ? Un aller-retour Paris-Moscou renvoie Poincaré, Hugo et Shakespeare, une fois retranslittérés en caractères latins, parfaitement défigurés : PUAN—KARE, GJUGO et ŠAKSPIR.

Ce genre de pataquès cesse d'être drôle lorsqu'il se produit sur votre billet d'avion quelque part au Japon via l'URSS. Histoire vécue.

REPONSE A

Collez votre prochain (PA N° 68-69-70, p. 44).

Sont masculins : baffle, astérisque, effluve, antidote, insigne, granule, hypogée, sex-shop, obélisque, prière d'insérer, alvéole, pétale.

Sont féminins : oriflamme, échappatoire, H.L.M., phalène, tique (de chien), stalactite.

Possèdent les deux genres, selon les auteurs : oasis, enzyme.

Connaissez-vous d'autres noms *«Hermaphrodites»* ?

Sainte orthographe (P.A. n° 71-72, p.175 et LES AVEZ-VOUS VU NAÎTRE ?

L'académicien qui se plaît à écrire OUISQUI est l'auteur de *Zazie dans le métro* ; voir, notamment, *Les œuvres complètes de Sally Mara* (1962, p. 176). Ce livre est une mine de trouvailles orthographiques et lexicales.

Le P.A. a relevé :
«...la lune des nuits se balançait ***lunairement*** *immobile sous la sphère des cieux* ***illunés****...«* (p. 16).

«le maître et madame m'accueillirent... ***protectivement****...»* (p. 28).

«...un homme qui se serait ***négativé*** *dans l'eau salée des océans...«* (p. 31)

*«Des incrustations...****stalactitaient*** *du plafond et* ***stalagmitaient*** *du sol»* (p. 176)

«...cherchant vainement à retrouver le ***ennième*** *mouvement et la* ***ixième*** *mesure...»* (p. 172. On écrit habituellement n-ième, x-ième).

Faut-il être académicien pour avoir le droit de se jouer de la sainte orthographe et de «néologiser» à hue et à dia, les non-académiciens risquant le bûcher ?

mais après tout, sont-ce des néologismes ? aimable lecteur, peut-être les avez-vous déjà rencontrés dans des textes plus anciens. Ecrivez-nous.

«Il l'a manqué belle, vous me l'avez donné bonne»

Les règles d'accord des participes passés ont beaucoup varié au cours du temps. Celles qui sont actuellement enseignées ne se sont vraiment imposées qu'au XIX[e] siècle. Ainsi, le célèbre grammairien du XVII[e] siècle Claude Favre, baron de Pérouges, seigneur de VAUGELAS écrivait : *«la peine que m'a DONNÉ cette affaire»*, ce qui ferait bondir un instituteur d'aujourd'hui. Il énonçait pour justifier cette absence d'accord, une règle générale vague : *«que l'on tendait à laisser le participe invariable quand il était suffisamment soutenu par les mots placés après lui»*. Les temps ont changé, les règles aussi.

Notre orthographe est le reflet de l'histoire. Elle fourmille de souvenirs d'anciennes manières qui, de nos jours, semblent incohérentes. Tel est le cas des locutions figées mentionnées empruntées au langage des joueurs de paume où le pronom «l'» représentait à l'origine le nom *balle.*

Pour en savoir plus, consultez *Le Bon Usage de Grevisse,* p. 425, et 731.

Les proportions linguistiques (P.A. N° 71-72, p. 17).

c'est Jean Giraudoux qui dans *Notes et Maximes sur le sport* établit la comparaison *«La course à pied est...»*. C'est François VI, duc de la Rochefoucauld qui dans ses *Maximes* écrivait *«l'élévation est au mérite...»*.

Certains auteurs font intervenir plus de deux rapports. Ainsi Diderot note : *«la rhétorique est à l'éloquence ce que la théorie est à la pratique, ou comme la poétique à la poésie»*.

QUESTION. En arithmétique, une proportion peut subir certaines transformations sans cesser d'être une proportion. On peut permuter les moyens, les extrêmes, inverser les deux rapports etc... Peut-on faire autant dans une proportion linguistique ?

COURRIER DES LECTEURS LES HOMOS...(P.A. N° 68-69-70 p. 44)

Grâce à notre ami Paul CANAL le P.A. ne se sent pas de joie.
Voici la belle collection d'homographes qu'il vient de recevoir :

• Pour ne froisser aucune susceptiblité, *le Président* et le Vice-Président *président* tour à tour.

• Toutes les Provençales, jeunes et vieilles *excellent* à préparer ce mets *excellent.*

• les *intentions* du notaire et de l'huissier sont que nous *intentions* sans délai le procès.

• Durville était un officier brave et *fier* et ses hommes pouvaient se *fier* à sa noblesse jamais en défaut.

• Pour être indifférent à la critique et à la louange, il ne serait cependant guère *content* que ses hôtes d'hier *content* partout cette histoire.

• Nous *relations* dans ce premier tome toutes les *relations* dignes d'intérêt des premiers explorateurs de la caverne.

• Les deux *fils* de la couturière n'aimaient rien tant que jouer avec les *fils*, les ciseaux et les aiguilles qui traînaient dans l'atelier.

• Si nous *acceptions* les différentes *acceptions* de ce mot.

• il est prudent de se méfier de leur caractère vif et *violent*, car ils violent souvent leurs promesses.

• Attirés par les moustiques qui y prolifèrent les têtards *affluent* à l'*affluent.*

Ceux qui *expédient* de semblables envois, usent, à la vérité, d'un *expédient* inadmissible.

Mais une collection n'est jamais finie et le P.A. ne refuse aucun don.

PA JEUX :

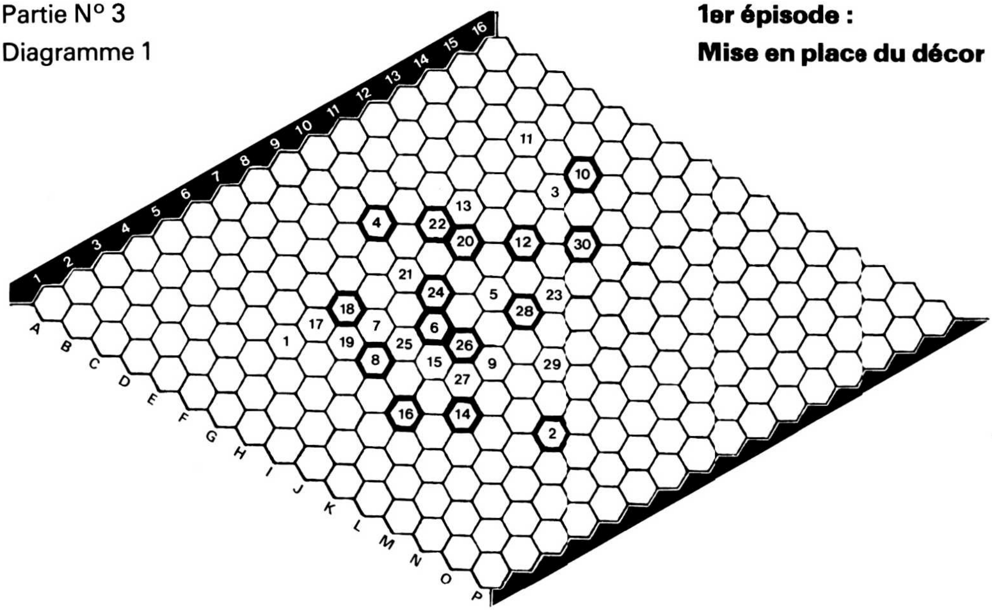
HEX
une partie commentée

Le Hex deviendra certainement un grand jeu classique... Les remarques et les erreurs (analysées !) d'aujourd'hui bâtiront la théorie de demain. Alors n'oubliez-pas de noter vos parties ! (et avec un peu de recul de les rejouer !).

En attendant voici une partie (peut-être naïve) très disputée: A vos jeux !

Partie N° 3
Diagramme 1

1er épisode :
Mise en place du décor



B		N		B		N		B		N	
1	F4	2	M6	11	D14 (a)	12	G11	21	F8	22	E10 (b)
3	F13	4	D9	13	E11	14	K5	23	I10	24	G8
5	H9	6	H7	15	I6	16	J4	25	H6 (c)	26	I7
7	G6	8	H5	17	F5	18	F6	27	J6	28	I9
9	J7	10	F14	19	G5	20	F10	29	K8	30	H12 (d)

Remarques :

(a) la phase de répartition stratégique est terminée ; chacun a essaimé des pions pour prendre des options de chemins. Le combat tactique commence où les joueurs cherchent à prendre appui sur les pions judicieusement posés..

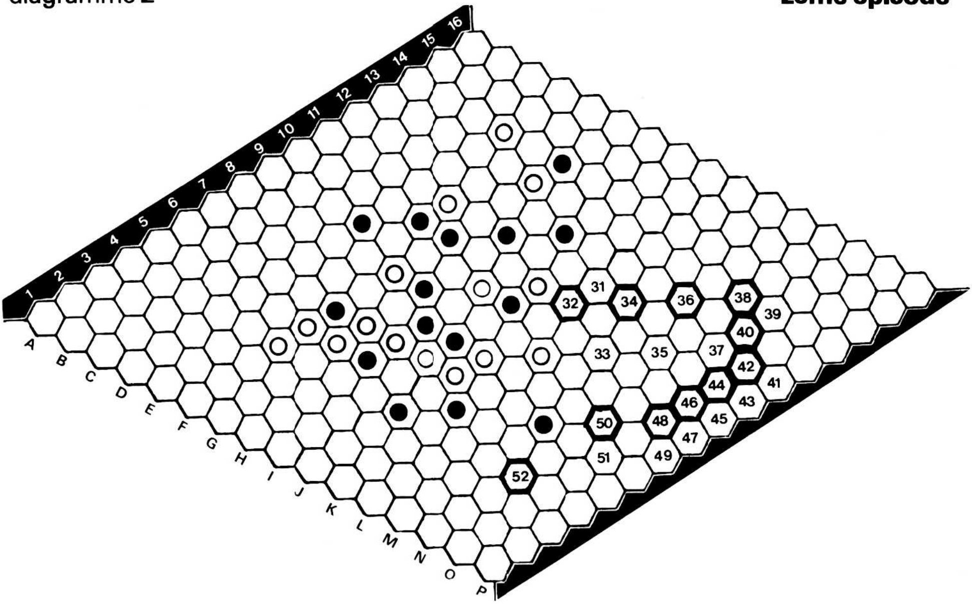
(b)... attaques et défenses se succèdent. Les deux derniers coups noirs sont assez pertinents : la construction d'un chemin blanc se fait problématique !

(c) Il ne reste que cette solution à envisager.

(d) Une course de vitesse est engagée !

Partie N° 3
diagramme 2

2ème épisode



B		N		N		N		B		N	
31	J11	32	J10	41	P11	42	O11	51	O6	52	N4!e
33	L9	34	K11	43	P10	44	O10				
35	M10	36	L12	45	P9	46	O9				
37	N11	38	M13	47	P8	48	O8				
39	N13	40	N12	49	P7	50	N7!				

Remarques :

(e) les noirs viennent de marquer un point important ; En se servant avec à propos du pion n° 2, leur premier pion posé (!), ils ont constitué un fort point d'ancrage. Mais le chemin noir n'est pas encore totalement établi ; Il faut toujours compter sur une furieuse défense adverse...

Dans une revue amie, JEUX, TU, ILS
L'excellent Jeu Reversi-Othello est étudié, passé au peigne fin de la théorie après les derniers championnats du monde (n° 9). Les dames chinoises ont fait l'objet d'une étude dans les n° 5 et 6. Pour plus de précisions écrire à : Association Jeudi, 2, square Jean Falck Paris 75010.

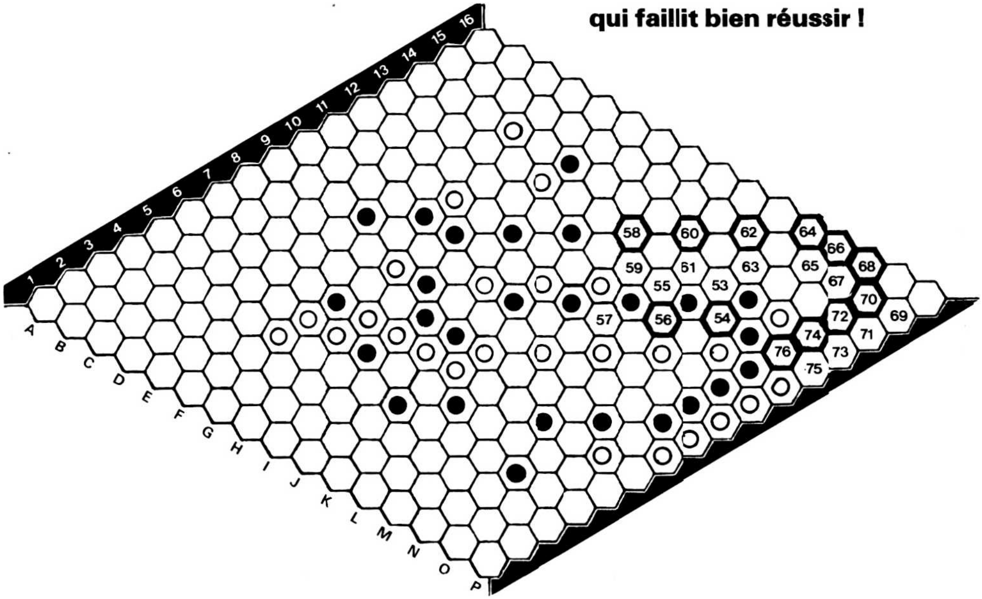
Partie n° 3

Diagramme 3

3ème épisode :

Une ultime défense blanche...

qui faillit bien réussir !



B		N		B		N		B		N	
53	L13	54	M12	65	M15	66	M16	75	P12	76	O12
55	K12	56	L11	67	N15 (g)	68	N16	77	abandon (h)		
57	K10!	58	I13	69	P15	70	O15				
59	J12	60	J14	71	P14	72	O14				
63	L14	64	L16! (f)	73	P13	74	O13				

Remarques :

(f) Si noir joue ici le coup plausible L15, il perd la partie !! ; suit : 65 M14, 66M15, 67O14 !, 68N14, 69M15, 70L16, 71N15!

(g) si 67O15, 68N15, 69O14, 70N14, 71O13, 72M14 !

(h) il ne reste que des coups de remplissage, et le pion noir D9 est trop près du bord pour tenter une défense.

Nouveauté dans le commerce : Les jeux Rachez viennent de sortir un jeu de Hex en bois (dimension 13 x 13). De l'autre côté du plateau se trouve le jeu des dames chinoises. Une bonne initiative, cependant nous déplorons le nombre impair de cases et préférons la dimension 16 x 16.

La rubrique HEX continue : pour toute correspondance, félicitations, injures, observations, demande de renseignements, etc...

Francis GUTMACHER
PA JEUX
61, rue St Fuscien
80000 AMIENS

ECHECS

CHRONIQUE ECHECS POUR LECTEURS NE SACHANT PAS JOUER AUX ECHECS

Le jeu d'Echecs a, comme bien des activités humaines, été la source de divertissements annexes. Les amateurs de jeux mathématiques connaissent bien le problème des huit dames ou celui du cavalier.

PROBLEME DES HUIT DAMES

Il s'agit de placer 8 dames sur un échiquier sans qu'aucune d'elles ne soit en prise (pour un non joueur le problème se formule : placer 8 pièces sur un échiquier de façon qu'on en trouve une au maximum sur chaque horizontale, verticale ou diagonale).

Pour la petite histoire, je dirai que ce problème semble avoir été proposé pour la première fois par MAX BEZZEL en 1848 dans un journal d'Echecs puis repris dans l'hebdomadaire «ILLUSRIETEN ZEITUNG» du 1er Juin 1850 par le Dr NAUCK qui en donna toutes les solutions le 21/9/1850.

Il est amusant de noter que le grand GAUSS n'avait d'abord trouvé que 72 des 92 solutions.

Un exposé complet se trouve dans «RECREATIONS MATHEMATIQUES» de E. LUCAS (TOME 1).

Ce problème a permis à SAM LOYD de proposer quelques récréations : Ainsi, les corbeaux dans le champ de maïs. Comment placer 8 pièces sur un échiquier (Les corbeaux dans le champ de maïs) sans qu'il y en ait 3 d'alignés (sans qu'un chasseur ne puisse en avoir 3 dans sa ligne de mire).

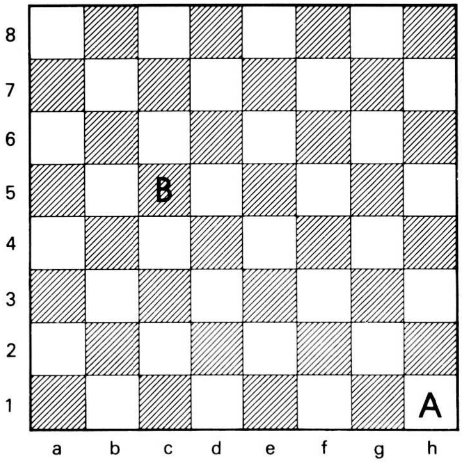
SAM LOYD propose aussi : PLACEZ 16 SOLDATS.

Il s'agit de placer 16 pièces sur un échiquier de façon qu'il y en ait 2 au maximum par ligne horizontale, verticale ou diagonale. Ce problème est relativement simple à résoudre aussi quand vous aurez réussi, recommencez en plaçant les 2 premières pièces sur 2 des 4 cases centrales.

Essayez maintenant de résoudre le même problème sur un échiquier 6 x 6 en commençant par placer 2 pièces aux extrêmités d'une diagonale. La question est : Combien de pièces au maximum pourrez-vous placer en respectant la règle précédente ?

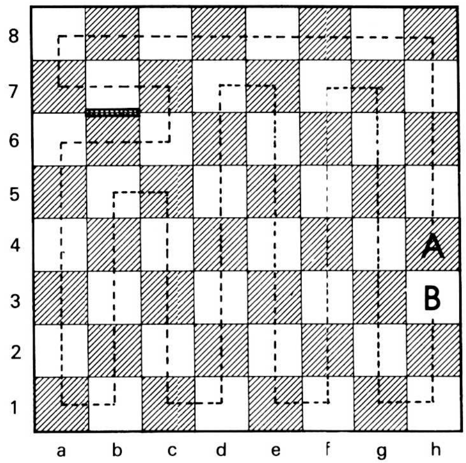
Les problèmes de chemins sur échiquier sont nombreux. Je vous en propose quelques-uns.

Comment aller de A à B en passant par toutes les cases et en effectuant le minimum de tournants ? (Vous n'avez pas le droit de vous déplacer en diagonale) (fig. 1).

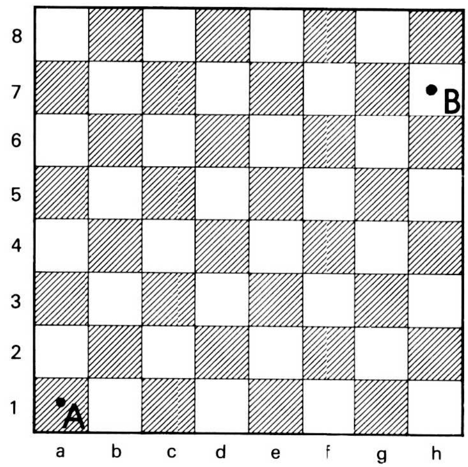


LE COCHON DANS LE JARDIN (SAM LOYD) -

Un cochon est entré dans le jardin représenté par l'échiquier à la case A. IL ne peut traverser la barrière située en haut à gauche. Il ressort par la case B. Le chemin indiqué comporte 23 angles droits. Trouvez un chemin «meilleur» c'est-à-dire comportant moins de tournants (le record est 14 !), en traversant toutes les cases (fig. 2).



Une tour en a1 doit se rendre en h7 en passant par toutes les cases (Elle n'a pas le droit d'aller en diagonale). Quel chemin minimum sera parcouru si les centres des cases sont distants de 15 cm et si chaque tournant amène une pénalité de 10 cm (fig. 3).



(autres problèmes et solutions dans le prochain numéro).

LES PB du PA

DES ÉNONCÉS

Il est des problèmes qui constituent un fonds culturel, une tradition orale. On en a souvent entendu parler, mais on les a rarement vus rédigés. Si des livres de récréations mathématiques les ont publiés, ces ouvrages sont aujourd'hui épuisés. Je pense par exemple au *«problème de la chèvre»* (PA 45-46, 47-48) ou aux *«Bœufs de Newton»* (PA 47-48, 55-56). Lorsque des lecteurs m'adressent de tels énoncés, je les publie bien volontiers, en considérant que telle question archiconnue des amateurs n'est pas nécessairement connue de tous, et aussi que notre époque peut se prêter à une approche nouvelle de problèmes anciens, notamment grâce aux progrès de l'algorithmique. Voici l'un de ces énoncés classiques.

PB 129 - la figure 1 représente, en vue de côté, deux échelles AB et CD, de longueurs 3m et 5 m, appuyées sur deux murs opposés. Sachant qu'elles se croisent en I à 1 m du sol, calculer la distance BD des deux murs.

Trois lecteurs m'ont envoyé ce problème, MM. Noirot, Gioria et Devalance, et avec des données différentes pour les longueurs des échelles : 3m et 8 m, 5 m et 7 m. Une solution générale serait donc la bienvenue, ainsi que tout renseignement sur **l'origine** de cette question.

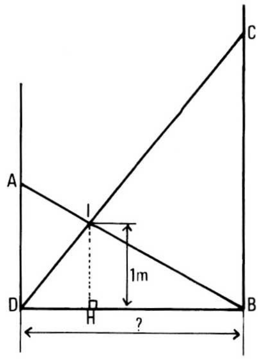


Figure 1

J'aimerais connaître aussi l'auteur du **PB** suivant, que vous offre M. Ferral, de Fanlac.

PB 130 - Trois personnages, nommés A, B et C, jouent à pile ou face. Tout d'abord, A joue avec B. Puis C joue avec le vainqueur du premier coup, et ainsi de suite : celui qui n'a pas participé à un coup rencontre le vainqueur de celui-ci au coup suivant. Est déclaré gagnant celui qui gagne deux coups consécutifs, et la partie s'arrête. Quelles sont les probabilités de gain de chacun des joueurs ?

Et enfin, de la part de M. Quevillard de Bezons :

PB 131 - un pénitencier est situé dans un désert de sable. A 22 h, un prisonnier s'évade. Il marche **droit devant lui**, à 6 km/h.

A 3h du matin, les gardiens constatent son évasion, mais le vent a effacé les traces du fugitif, et ils ignorent la direction que celui-ci a empruntée. Ils se lancent immédiatement à sa poursuite en voiture, à 60 km/h, en suivant une trajectoire telle qu'ils sont sûrs de le rencontrer. Quelle est donc cette trajectoire ? Avant quelle heure le rattraperont-ils ?

*

* *

DES SOLUTIONS

PB 120, PA 68-69-70, p. 60

(Vaches de ferme))

La figure 2 représente le plan d'une ferme située au centre d'une propriété divisée en huit zones (Nord, Nord-Est, Est, Sud-Est, etc...). La ferme a quatre fenêtres, situées aux quatre points cardinaux. Par chaque fenêtre, le fermier voit 15 vaches, qui paissent dans trois zones de la propriété. En tout, il possède 47 vaches. De combien de manières peut-on les répartir dans les huit zones pour que le problème soit possible ?

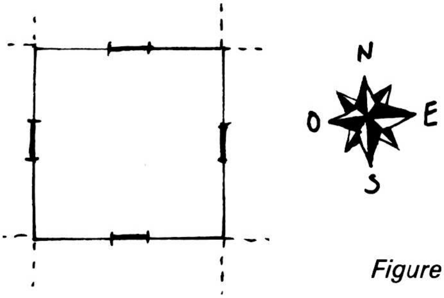


Figure 2

Solution de Mlle Sambard, de St-Quentin : on désigne par x, y, z les nombres des bêtes contenues dans les régions NO, N, O. On obtient dans les autres régions les nombres indiqués sur la figure 3. Ces huit nombres doivent être tous compris entre 0 et 15, ce qui conduit au système suivant :

$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 2,\ z \geqslant 2,$$
$$x + y \leqslant 15,\ x + z \leqslant 15,\ x + y + z \geqslant 17$$

NO x	N y	NE 15-x-y
O z		17-z E
SO 15-x -y	17-y S	x + y + z-17 SE

figure 3

Si l'on considère (x, y, z) comme les coordonnées d'un point M dans un repère orthonormé, les triplets (x, y, z) solutions du système ci-dessus sont les coordonnées entières des points du tétraèdre ABCD dont les six faces ont pour équations : $x = 0$, $y = 2$, $z = 2$, $x + y = 15$, $x + z = 15$, $x + y + z = 17$ (voir figure 4).

On a : $0 \leqslant x \leqslant 13$. Pour dénombrer ces points, on cherche combien il y en a

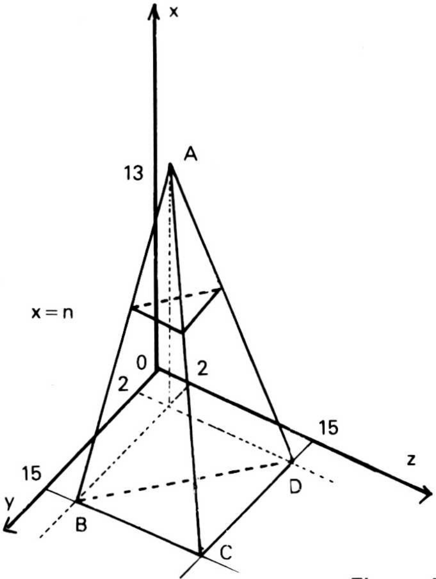


Figure 4

dans le plan d'équation $x = n$, pour n donné tel que $0 \leqslant n \leqslant 13$. Ces points vérifient le système :

$$\begin{cases} 2 \leqslant y \leqslant 15\text{-}n \\ 2 \leqslant z \leqslant 15\text{-}n \\ y + z \geqslant 17\text{-}n \,. \end{cases}$$

Ce sont les points entiers du **triangle** dont les côtés sont les droites :

$y = 15\text{-}n$, $z = 15\text{-}n$, $y + y = 17\text{-}n$ (figure 5).

Leur nombre est :

$S_n = 1 + 2 + \ldots + (14\text{-}n)$. C'est le nombre **triangulaire** $T_{14\text{-}n} = \dfrac{(14\text{-}n)(15\text{-}n)}{2}$.

Le nombre total cherché est donc :

$T_1 + T_2 + \ldots + T_{14} = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \ldots + 91 + 105 = 560.$

Nous avons notre solution. Mais nous pouvons en dire plus sur ces nombres **tétraédriques** Q_m obtenus en sommant les **m** premiers nombres triangulaires :

$$Q_m = \sum_{k=1}^{m} T_k .$$

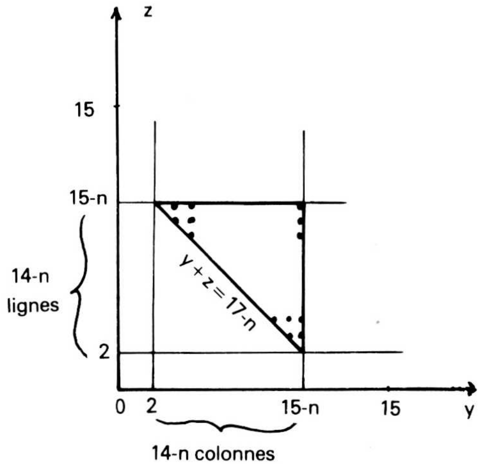


Figure 5

Il faut se rappeler que les nombres triangulaires T_m eux-mêmes sont obtenus en sommant les m premiers entiers naturels :

$$T_m = \sum_{k=1}^{m} k .$$

Et ces entiers sont à leur tour des sommes d'unités. Tout ceci peut se consigner sur le tableau suivant, où k est le numéro de la colonne et m celui de la ligne :

m	k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
O		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	T_k	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105
3	Q_k	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455	560

Et l'on pourrait continuer : la somme $\sum_{k=1}^{m} Q_k$ correspond au nombre de points entiers contenus dans un «hyper-tétraèdre», un simplexe à 4 dimensions. Mais au fait, les nombres composant ce tableau vous sont sans doute connus, surtout si vous regardez les obliques ascendantes à 45°. Vous voyez ainsi successivement : 1, puis : 1, 1, puis : 1,2,1, puis : 1,3,3,1. Et l'on aurait 1,4,6, 5,1, si la ligne suivante était remplie. C'est le **Triangle de Pascal**, et même tel que Pascal l'a présenté (voir **Pascal** Oeuvres complètes, Pléiade 1957, p. 97). Le nombre figurant dans la ligne numéroi m et la colonne numéro k est donc :

C^{m}_{m+k-1}. Ainsi, par exemple,

$$Q_k = C^3_{k+2} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}.$$

En particulier, $Q_{14} = \frac{14.15.16}{6} = 560$

Revenons à notre système de six inéquations, et au tétraèdre qu'elles représentent. Au lieu de couper notre tétraèdre par une série de plans d'équations $x = n$, comme plus haut, on peut penser à fixer y, et donc à le couper par les plans d'équations $y = n$, pour n tel que : $2 \leqslant n \leqslant 15$, chacun de ces plans est parallèle aux arêtes AB et CD de notre tétraèdre, et le coupe donc suivant un **parallélogramme.** Les points qui nous intéressent ont des coordonnées x et z qui vérifient :

$0 \leqslant X \leqslant 15\text{-}n$

$x + z = \leqslant 15$

$x + z \geqslant 17\text{-}n$

$z \geqslant 2$

On trouve bien un parallélogramme (voir figure 6). Le nombre de ses

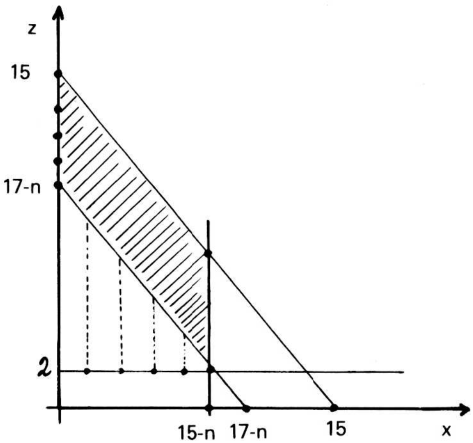


Figure 6

points entiers est : (n-1) (16-n) et le nombre total des points cherchés est donc :

$$\sum_{n=2}^{15} (n-1)(16-n) = 1.14 + 2.13 + \ldots + 7.8 + 8.7 + \ldots + 14.1 = 560$$

C'est la solution donnée par Mme Chrétien. Généralisée, cette solution nous fournit l'identité :

$$Q_k = \frac{k(k+1)(k+2)}{6} = \sum_{i=1}^{k} i(k+1-i),$$

que je vous laisse le soin de prouver.

PB 121, PA 68-69-70, p. 60
(Calculs approchés)
A l'aide de ma calculatrice, je trouve :
tg 89° = 57,28996163 ;
tg 89,9° = 572,9572134 ;
tg 89,99° = 5729,577893 ;
tg 89,999° = 57295,77951.
Il semble que, chaque fois que j'ajoute un 9 à la partie décimale, le résultat soit multiplié par 10. Pourquoi ?

Lorsque l'on positionne la calculatrice sur DEG, la fonction fournie par la touche TG est $f(x) = \text{tg}\frac{\pi}{180}x$; OÙ «tg» désigne la fonction «tangente» bien connue, telle que $\text{tg}\,\frac{\pi}{4} = 1$, et que $\text{tg}x \simeq x$ si x est «petit». IL en résulte que :

$$f(90 - 10^{-n}) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{180}10^{-n}\right) = \frac{1}{\text{tg}\frac{\pi}{180}10^{-n}} \simeq \frac{180}{\pi}10^{n}$$

Or, on a : $\frac{180}{\pi} \simeq 57,29577951$, ce qui explique le phénomène observé.

PB 124, PA 71-72, p. 33 - (Fibonacci-produits) Vous connaissez la **suite de Fibonacci** : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 13, 21, 34,... où chaque terme est la somme des deux précédents. Mais le **produit** de deux termes quelconques (sauf 0 et 1) peut-il être encore un terme de cette suite ?

En cherchant empiriquement, on constate que la réponse paraît négative. Plus précisément, il semble que l'on ait, pour $m \geqslant 3$ et $n \geqslant 3$:

$$F_{m+n-2} < F_m F_n < F_{m+n-1} \quad (1)$$

Mme Chrétien démontre cette assertion en utilisant la **formule de Binet** $F_n = \dfrac{a^n - b^n}{a - b}$

où a et b sont les racines de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$. elle en déduit les égalités :

$F_mF_n + F_{m-1}F_{n-1} = F_{m+n-1}$ (2),

$F_mF_n - F_{m-2}F_{n-2} = F_{m+n-2}$ (3),

et enfin la relation (1) voulue. C'est un raisonnement analogue que présente M. Esch, de Nessonvaux (Belgique). Mais on pouvait simplement procéder par récurrence **sur n** en supposant m constant.

En effet, si la relation (1) est vraie de n et de n + 1, elle est immédiatement vraie de n + 2 : on le montre en sommant membre à membre les inégalités :

$F_{m+n-2} < F_mF_n < F_{m+n-1}$

$F_{m+n-1} < F_mF_{n+1} < F_{m+n}$ ce qui donne : $F_{m+n} < F_mF_{n+2} < F_{m+n+1}$. Reste à prouver que la relation (1) est vraie de n = 3 et de n = 4 Pour n = 3, elle s'écrit :

$F_{m+1} < 2F_m < F_{m+2}$ (4), soit : $F_{m+1} - F_m < F_m < F_{m+2} - F_m$ ou encore : $F_{m-1} < F_m < F_{m+1}$, ce qui est évident si m $\geqslant$ 3. Pour n = 4, la relation (1) devient :

$F_{m+2} < 3F_m < F_{m+3}$, qui se prouve en ajoutant membre à membre la relation (4) :

$F_{m+1} < 2F_m < F_{m+2}$ et la relation évidente : $F_m = F_m < F_{m+1}$

Notre ami R. Cori utilise aussi la relation (2), qu'il démontre par récurrence sur n, et en déduit que F_k divise F_h si et seulement si k divise h (étant donné que k $\geqslant$ 3 et h $\geqslant$ 3). Si l'on avait $F_mF_n = F_p$, il résulterait de (2) que l'entier m devrait vérifier : $F_p \leqslant F_{m+n-1}$, d'oû p $\leqslant$ m + n - 1, et comme p devrait être multiple de m et n, c'est impossible si m $\geqslant$ 3 et n $\geqslant$ 3.

C'est aussi un argument de divisibilité qu'utilise M. Roux, de Chadrac, qui s'appuie sur le théorème suivant : «tout terme de la suite de Fibonacci, excepté $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_6 = 8$ et $F_{12} = 144$ possède au moins un **diviseur propre**, c'est-à-dire un nombre premier qui le divise sans diviser aucun des termes précédents». La propriété en question dans le PB 124 en résulte immédiatement une fois qu'on a vérifié que F_6 et F_{12} ne sont pas les produits de deux termes F_i autres que 1. On peut même affirmer qu'aucun F_n n'est produit de **plusieurs** F_i autres que 1, si l'on excepte $F_6 = (F_3)^3$ et $F_{12} = (F_3)^4(F_4)^2 = F_3(F_4)^2F_6$ mais le théorème cité par M. Roux est bien plus difficile à démontrer que la propriété qui faisait l'objet du présent PB. Il est vrai qu'il est plus riche en corollaires : on n'a rien sans rien.

PB 127, PA 71-72, p. 33

Temps d'attente - On lance plusieurs fois de suite un dé normal, et l'on s'arrête lorsque les six faces sont apparues, chacune une fois au moins. Pour cela, combien faut-il de lancers, **en moyenne ?**

Voilà la solution de M. Rémy, à qui nous devons cet énoncé : le jeu se décompose en six manches, chaque manche se terminant lorsqu'une nouvelle face apparaît. Soit $\overline{T}$ la durée moyenne du jeu complet et $\overline{T}i$ la durée moyenne de la i-ème manche. Il est claire que $\overline{T}=1$ et que $\overline{T}=\overline{T}_1+\overline{T}_2+\overline{T}_3+\overline{T}_4+\overline{T}_5+\overline{T}_6$.

Pour déterminer $\overline{T}_2$, supposons que la face obtenue au premier coup portait le N° 1. La deuxième manche durera **un** coup si la deuxième face porte l'un des numéros : 2,3,4,5 ou 6. Elle durera plus d'un coup si cette deuxième face porte le n° 1. Dans ce dernier cas, le déroulement ultérieur de cette manche n'est pas influencé par l'échec initial, et sa durée moyenne sera encore $\overline{T}_2$: ceci a lieu en moyenne une fois sur six. De sorte que $\overline{T}_2$ vérifie l'équation :

$$\overline{T}_2=1+\frac{1}{6}\overline{T}_2$$

ce qui donne $\overline{T}_2=\frac{6}{5}$

Le même raisonnement permet d'obtenir $\overline{T}_i$, en supposant que les faces déjà obtenues, lors des i - 1 manches précédentes, portent les numéros 1, 2...i-1. Si l'on obtient un numéro $\geqslant$ i lors du premier coup de la i-ième manche, c'est terminé. Sinon, le déroulement ultérieur de cette manche ne sera indépendant de ce premier coup. La probabilité de cette seconde situation est :

$$\frac{i-1}{6}$$

par suite, $\overline{T}_i$ vérifie l'égalité :

$$\overline{T}_i=1+\frac{i-1}{6}\overline{T}_i$$

d'où : $T_i=\frac{6}{7-i}$

On en déduit la valeur de T :

$$\overline{T}=6\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\right)=14{,}7$$

On trouve la **moyenne harmonique** des entiers de 1 à 6, cette moyenne qui intervient aussi, nous rappelle M. Rémy, dans les problèmes de robinets, et j'ajouterai : dans certains problèmes de vitesses de mobiles (voir PB 31, PA 19, et PB 34, PA 20).

Bien sûr, on pourrait attaquer ce problème différemment : la loi de la variable aléatoire T_i est aisée à déterminer : on a

$$p(T_I=k)=\frac{7-i}{6}\left(\frac{i-1}{6}\right)^{k-1}$$

(loi **géométrique**), d'où :

$$\overline{T}_i=\sum_{k=1}^{+\infty} k\,\frac{7-i}{6}\left(\frac{i-1}{6}\right)^{k-1}=$$

$$\frac{7-i}{6}\quad\frac{1}{\left(1-\frac{i-1}{6}\right)^2},$$

qui donne bien le même résultat.

M. Roux donne même l'expression de la loi de la variable T, durée du jeu :

$$p(T=k+1)=\frac{S_k^5}{6^k}$$, où S_K^5

désigne le nombre d'applications **surjectives** d'un ensemble à k éléments (ensemble des k premiers coups) sur un ensemble à 5 éléments (ensemble des numéros autres que le numéro sorti au k + 1-ième coup). La suite résulte du fait que l'on a :

$$S_k^5=\sum_{j=o}^{5}(-1)^{5-j}\,C_5^j\,j^k$$

(voir les «principes de Combinatoire» de Claude Berge, Dunod 1968, p. 35).

M. Esch a aussi trouvé la loi de T et en a déduit $\overline{T}$. Il a retrouvé cette valeur moyenne par un procédé récurrent utilisant des propriétés des chaînes de Markov. Mais c'est encore la première solution qui est la plus simple.

PB 128, PA 71-72, p. 33

(Opérations autorisées) - Considérons comme opérations autorisées : l'addition, la soustraction et l'opération «unaire» qui consiste à prendre l'inverse d'un nombre (non nul). Comment peut-on obtenir le produit de deux **réels** donnés par une suite bien choisie de telles opérations ?

Solution de M. Roux :

«$$\frac{1}{a}+\frac{1}{1-a}=\frac{1}{a(1-a)}$$

donc on peut former $a(1-a)=a-a^2$. Comme $a^2=a-(a-a^2)$, on peut calculer le carré de tout réel avec 6 opérations. Si a et b sont deux réels, on peut obtenir : $(a+b)^2$ (7 opérations), a^2 (6 opérations), b^2 (6 opérations), et donc : $2ab=(a+b)^2-a^2-b^2$ avec 21 opérations. Enfin, on calcule :

$$ab=\frac{1}{\frac{1}{2ab}+\frac{1}{2ab}}$$

avec en tout 25 opérations. Peut-on mieux faire ?».

C'est ce que je voous demande aussi. Une application intéressante de cet exercice est la suivante : soit F un corps commutatif de caractéristique $\neq 2$ et f une application $F \to F$ telle que : $f(x+y)=f(x)+f(y)$ et $f(1/z)=1/f(z)$ pour tous x, y, z, avec $z \neq 0$. Alors, on a aussi $f(xy)=f(x)f(y)$.

Pour une extension du cas non commutatif et des utilisations géométriques de cette propriété, je vous renvoie à un grand livre trop peu connu, eu égard à son intérêt : «Algèbre Géométrique» de **Emil Artin**, chez Gauthier-Villars.

*

Au fil de ces lignes, vous avez pu mesurer tout ce que cette rubrique doit à ses lecteurs. Vous qui la lisez, faites comme ceux que j'ai cités : prenez la plume et collaborez. Résolvez les problèmes, envoyez des énoncés, corrigez les erreurs ou maladresses, critiquez ou louez, suggérez, et envoyez le tout à :

M. CUCULIERE Roger
Professeur de Mathématiques
Lycée Henri Wallon
146, Rue des Cités
93300 AUBERVILLIERS

LE COURRIER DES LECTEURS

L 146 de R.Grassi de Gradignan

(Le succès de notre numéro PI nous vaut d'abondants courriers. Notre fidèle lecteur R.Grassi nous fournit celui-ci. Apprécions-en l'humour !).

Après l'histoire de la « π panthère»..., connaissez-vous la démonstration qui donne :

$$\pi = 1$$

Tout d'abord le postulat suivant :

$$\boxed{\text{CHEVAL} = \text{BETAIL}}$$

divisons par L — CHEVA$\cancel{L}$ = BETAI$\cancel{L}$

on peut intervertir l'ordre des facteurs — VACHE(1) = IBETA

effectuons — $\beta\pi = I\beta$

Divisons par ß — $\cancel{\beta}\pi = I\cancel{\beta}$

et — $\pi = 1$

(1) VACHE = Bête à pis

L 147 de Louis Thépault - 78 Voisins le Bretonneaux

Faute de place, nous vous fournirons l'intégralité de ce courrier dans un prochain PA. Mais nous vous en livrons ici l'essentiel, en fait pour tous nos lecteurs, c'est un nouveau et excellent problème.

P.A. propose (n° 71—72, page 18) un texte pour ses jeunes lecteurs : «Triangle et soustraction». Pour étudier le problème, remplacez tout nombre pair par 0, tout impair par 1 ; Ainsi :

```
6   1   4
  5   3
    2
```

devient

```
0   1   0
  1   1
    0
```

Certains essais difficiles seront alors immédiatement et très facilement écartés. Par exemple ce triangle d'ordre 5 :

```
1   0   1   1   0
  1   1   0   1
    0   1   1
      1   0
        1
```

sera rejeté puisque il contient dix nombres impairs (il doit être construit avec les 15 premiers naturels de 1 à 15).

Des considérations très élémentaires vous permettront à partir de considérations très simples de déduire des «théorèmes» qui vous permettront d'avancer beaucoup plus vite dans ce problème «combinatoire». Monsieur Thépault vous en propose pas moins que sept ! Alors, lecteurs, réfléchissez donc à ce nouvel aspect du problème.

LE PETIT ARCHIMÈDE

Revue de l'Association pour le Développement de la Culture Scientifique
10 numéros par an

ABONNEMENT 1981 (nouveau tarif)

Abonnement de Soutien : 100F ☐ (1)
Abonnement de Bienfaiteur : 500F ☐ (1)
Abonnement ordinaire : 50 F ☐ (1)
Abonnements groupés (minimum 10) : 35 F
(Ils peuvent être servis à une ou plusieurs adresses) ☐ (2)

MAJORATION POUR TOUT ENVOI HORS EUROPE
ou PAR AVION (le préciser) de 50 %

Toutes les collections anciennes sont disponibles :
N° 1 à 10, 11 à 20, 21 à 30, 31 à 40, 41 à 50, 51 à 60 : 35F
Prix de vente au n° : 8F la collection 61 à 70 : 40 F

PRODUCTIONS SPECIALES

Le nouveau calendrier perpétuel : 50 F le paquet de cinquante ☐ (3)

Affiches (5 affiches : 15 F) (10 affiches : 25 F) ☐ (2)

N° Spécial PA Sp1 (index général PA1 à PA50) : 5 F ☐ (1)

N° Spécial Pi : 75 F - A partir de 4 exemplaires : 70 F l'unité
A partir de 10 exemplaires : 60 F l'unité ☐ (2)

NOM : Prénom :
Adresse d'expédition :
Code Postal : Ville :
Bureau distributeur :
Cette demande est à adresser exclusivement à :

ADCS - Abonnement - 61 rue St Fuscien 80000 AMIENS

Joindre chèque ou mandat à l'ordre de :

ADCS CCP 4736 63 W LILLE

(1) cocher les cases utiles
(2) Nombre d'exemplaires
(3) Nombre de paquets de cinquante cartes postales

LES ETABLISSEMENTS SCOLAIRES PEUVENT-ILS ÉVITER LES DEMANDES DE FACTURE ? MERCI

Adresser toute correspondance à :
Y. ROUSSEL - 61 rue St Fuscien 80000 AMIENS
Revue éditée par l'A.D.C.S. - Le Directeur de la publication J.C. HERZ
IMPRIMERIE I & RG AMIENS Tél. 92.60.16

N° 73-74 : 8 F