le petit archimède

On a écrit les nombres entiers de 0 à 149
Les sommes des nombres rencontrés sur chacun des cercles sont égales à 1490

P.A. 77-78 10 numéros par an

OCTOBRE-NOVEMBRE 81

SOMMAIRE

Nos conventions : pour les «petits» facile
difficulté moyenne pour les grands

PA à ses lecteurs, Salut.

Un abonnement comporte dix numéros de 24 pages. Mais nous sommes souvent conduits à faire des numéros doubles (48 pages). L'abonnement à PA ne comporte donc pas nécessairement dix arrivages dans l'année !

Tout abonnement en cours d'année (elle est civile) signifie la réception par l'abonné de tous les numéros de la dite-année déjà parus.

Votre abonnement se termine avec le numéro 80 (peut-être le numéro double 79-80). N'oubliez pas de vous réabonner dès maintenant, de rechercher un ou des nouveaux abonnés (!) et de penser à offrir un bien joli cadeau de fin d'année : il s'agit bien entendu du numéro spécial PI !

P.A.

J'AI FAIT UN CONCOURS ET J'AI APPRIS LA GEOMETRIE (1) en dégustant du fromage

On pouvait lire il y a un an et demi à l'intérieur du couvercle des boîtes d'une certaine marque de fromage :

«GRAND CONCOURS - 1er PRIX : 60 000 F»

Voici quatre provinces de France numérotées de 1 à 4

1- Pays Basque 2 - Provence 3 - Bretagne 4- Alsace

Question 1 - (Quatre silhouettes de maisons sont proposées). Indiquez pour chaque maison le numéro de sa province.

Question 2 - Indiquez devant chacune des quatre spécialités suivantes le numéro de sa province d'origine :

☐ la bourride ☐ la piperade ☐ la bardatte ☐ le kugelhopf

Question 3 - DETERMINEZ **A DIX METRES PRES** LA DISTANCE **A VOL D'OISEAU** DE L'AXE DE SYMETRIE DE LA FLECHE DE LA CATHEDRALE DE STRASBOURG A LA STATUE DE NOTRE DAME DE LA GARDE A MARSEILLE. Vous pouvez envoyer autant de réponses que vous voulez (sur couvercles de boîtes de notre fromage).

* *
*

Pour les deux premières réponses, il y avait 24 X 24 possibilités... sauf si l'on avait une bonne encyclopédie.

Mais POUR LA QUESTION 3, COMMENT AURIEZ-VOUS FAIT ?

Lettres, suggestions, calculs, résultats, méthodes, formules sont à adresser à :

M. Yvan GRIMALDI (géométrie)
27, chemin du Frémont
80260 BERTANGLES.

(1) «géométrie» art de mesurer la terre (étymologie)

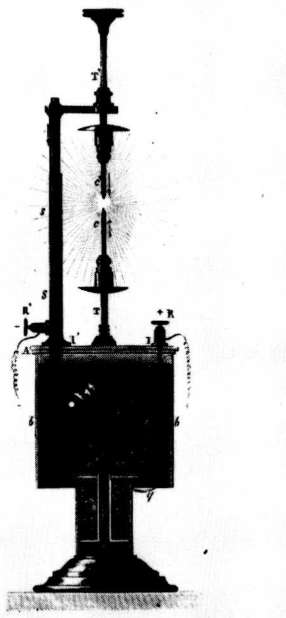
PETITE HISTOIRE DE L'ÉLECTRICITÉ

(suite et fin)

L'ÈRE INDUSTRIELLE

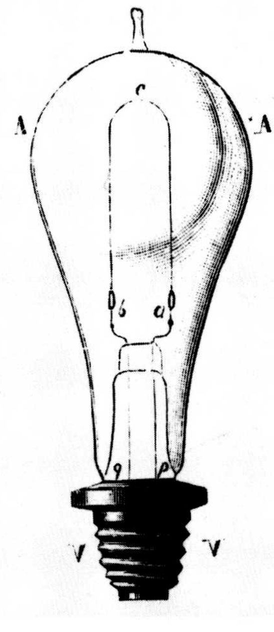
L'invention de la dynamo Gramme fonctionnant en générateur ou en moteur et celle du transformateur permettent à la fin du XIXᵉ siècle de résoudre le problème du transport de l'énergie à distance.

Les dynamos peuvent recevoir l'énergie nécessaire à leur mise en mouvement grâce à l'effet d'une chute d'eau agissant sur les pales d'une turbine ou être entraînées par de puissantes machines à vapeur. La première application pratique de cette «distribution électrique» est évidemment l'éclairage.



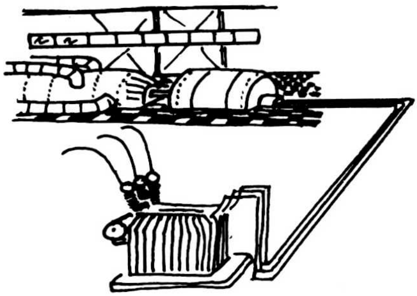
Lampe à arc à régulateur (1860)

Jusqu'en 1870, l'éclairage électrique n'a qu'un usage très limité ; la lampe à arc, seule connue, exige une intensité importante. De timides essais de lampes utilisant l'incandescence de rubans métalliques ou de carbone ont bien lieu mais là aussi les intensités nécessaires étaient énormes ; il n'était pas raisonnable d'imaginer des dizaines de milliers de telles lampes brillant dans une cité alimentée par une même usine.



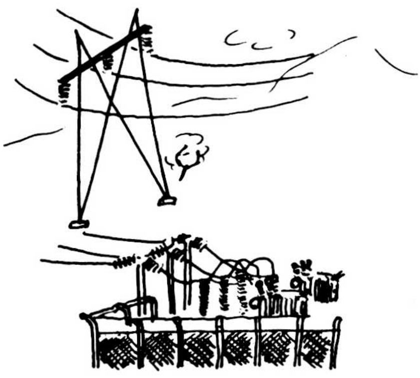
Lampe à incandescence à filament de carbone

En 1878, Edison imagine de remplacer les bandes et les rubans des lampes précédentes par un filament fin qu'il place dans le vide pour éviter qu'il ne se consume. La résistance est plus grande, les lampes n'exigent qu'une intensté réduite mais le fil brûle plus ou moins rapidement. Edison dut à sa longue patience de trouver d'abord le fil de carbone tiré du bambou du Japon, puis un filament artificiel à base de cellulose qui permette enfin la fabrication industrielle de ces lampes.

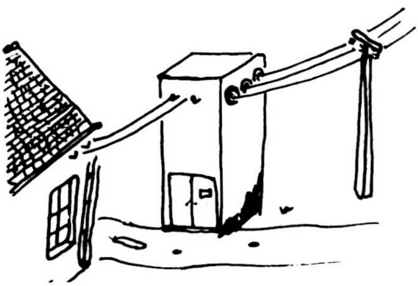


ALTERNATIF OU CONTINU

Les dynamos fournissent du courant continu. Pour le transport de l'énergie à distance, les fils utilisés s'échauffent et la puissance disponible au bout de la ligne est diminuée de ces pertes.



Pour les limiter au maximum, on a intérêt à utiliser une tension électrique aussi élevée que possible mais cela, l'usage du courant continu ne le permet pas. C'est la raison pour laquelle l'invention de Lucien Gaulard en 1882, le transformateur, resurgit de l'oubli. Grâce à lui, il est possible d'élever ou d'abaisser la tension d'un courant alternatif produit par une dynamo dont le système collecteur chargé de redresser le courant est court-circuité (la machine devient alors un alternateur). A l'usine productrice un transformateur élève la tension. Les pertes dans les lignes de transport sont donc réduites. Au poste de distribution un transformateur «dévolteur» abaisse à nouveau cette tension jusqu'aux valeurs d'utilisation.

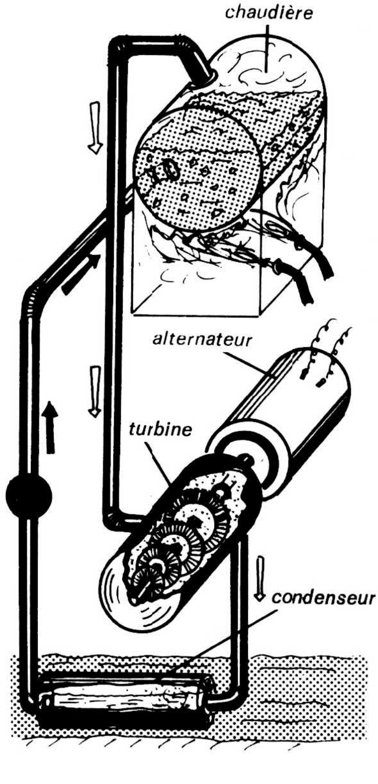


LES CENTRALES ELECTRIQUES

Au début du XXᵉ siècle, la plupart des centrales destinées à alimenter les réseaux de distribution puisent l'énergie motrice dans les chutes d'eau. Selon la nature de la chute, les turbines utilisées pour faire tourner les alternateurs ont des formes différentes.

Dans les régions ne pouvant bénéficier d'un réseau de cours d'eau ou de chutes suffisantes, on installe des centrales thermiques où l'énergie provient de la combustion du charbon et plus récemment du pétrole dans les foyers des chaudières. La vapeur sous pression ainsi produite est lancée sur les palettes des turbines. Celles-ci entraînent alors l'arbre de l'alternateur. Actuellement, les groupes turbines-alternateurs peuvent atteindre des puissances de l'ordre de 600 MW.

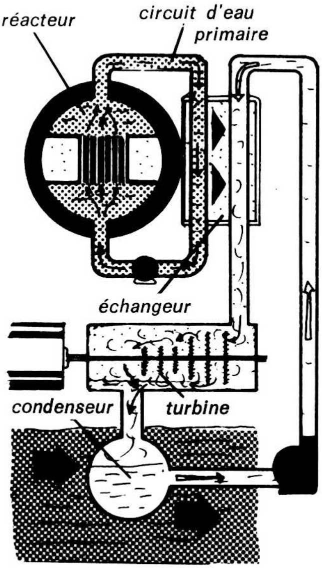
Depuis une vingtaine d'années les réactions en chaîne de fission (cassure de noyaux d'atomes d'uranium) libérant une énorme quantié de chaleur sont mises à contribution dans le cœur des réacteurs nucléaires pour servir de foyer à des chaudières nucléaires alimentant en vapeur les turbines. Les centrales électronucléaires ne diffèrent donc des centrales à pétrole ou à charbon que par le seul moyen de chauffage.



La centrale thermique à fuel

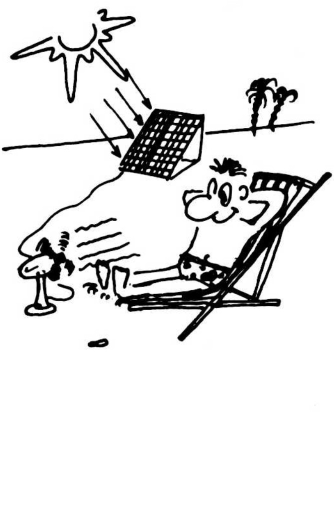
L'ENERGIE SOLAIRE

Dans les méthodes décrites précédemment, et qui sont celles que l'on utilise actuellement pour la production d'électricité, on voit que l'énergie électrique n'apparaît qu'à l'issue d'une double transformation chaleur $\rightarrow$ mouvement et mouvement $\rightarrow$ énergie électrique. A chacune de ces étapes (et surtout à la première) une perte importante a lieu. Ne pourrait-on trouver le moyen de transformer directement de la chaleur en énergie électrique, ou, mieux encore, une autre forme d'énergie abondante en électricité ? La Terre reçoit sur toute sa surface une énergie abondante et gratuite mais qui n'est pas localisée : la lumière solaire. Certaines substances recevant la lumière solaire perdent directement des électrons qui peuvent être recueillis par des électrodes convenables. On fabrique ainsi de telles photopiles en déposant une couche de sélénium sur une plaque de fer, une mince couche d'or transparente fine sur l'électrode supérieure.



La centrale thermique nucléaire

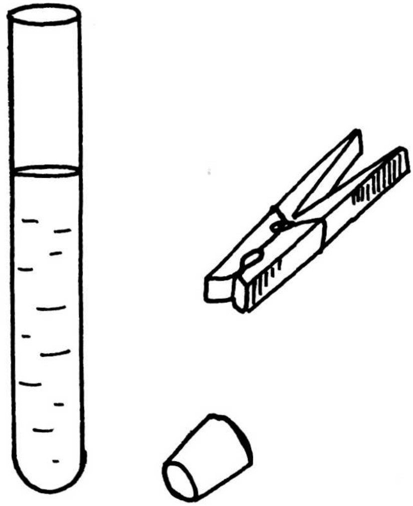
Les batteries de photopiles fournissent l'énergie électrique nécessaire à bord des engins spatiaux et on peut imaginer une grande extension future de ce mode de production d'énergie électrique.



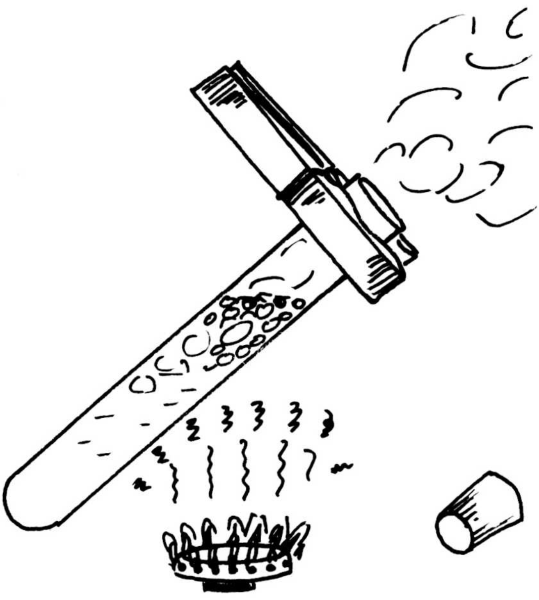
LES CAILLOUX INVISIBLES

Entendre un étrange bruit métallique et un choc solide lorsqu'on secoue un tube à essais rempli aux trois quarts avec seulement de l'eau, chercher alors les graviers ou les cailloux qui dans le tube *doivent* en être responsables et pourtant ne rien trouver, voilà de quoi déconcerter l'observateur même le plus perspicace.

C'est ce petit tour de physique amusant que nous vous proposons de réaliser ici avec un matériel extrêmement restreint (1). Il vous faudra en effet disposer pour cela simplement d'un tube à essais en verre (tube à vanille par exemple) d'une contenance de l'ordre de 30 cm^3, d'une pince à linge en bois pour le tenir et d'un bon bouchon (si possible au néoprène ou à la rigueur en liège bien serré) et d'une lampe à alcool ou d'un réchaud à gaz (brûleur de plus petite taille). On commence par emplir aux deux tiers le tube à essais d'eau puis en le tenant par la pince, on fait bouillir sur le réchaud l'eau à la partie supérieure. Si vous chauffiez l'ensemble du tube, l'ébullition chasserait l'eau par projection, ce qui serait d'une part dangereux pour vous et d'autre part nuisible pour notre expérience car il faut que le tube conserve une masse d'eau importante (2).

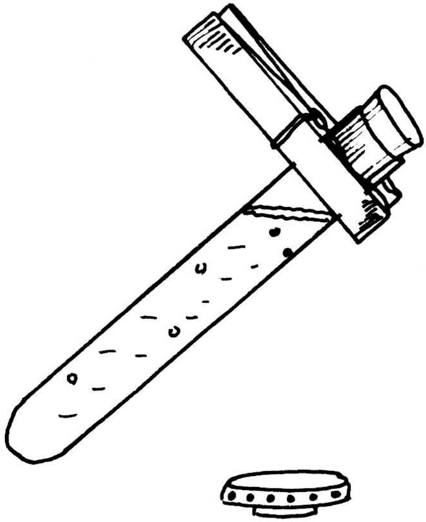


1/ le matériel nécessaire : tube de verre, pince à linge, bouchon



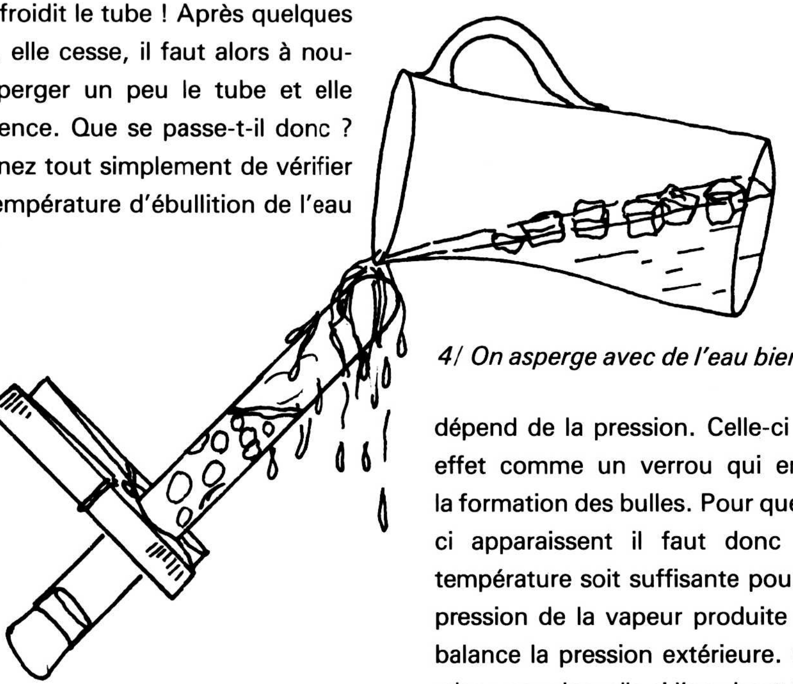
2/ faire bouillir l'eau du tube

Après quelques secondes d'ébullition à la partie supérieure, on peut être assuré que la vapeur d'eau a bien chassé l'air. On bouche alors hermétiquement le tube (3) sans attendre (sinon l'air réintégrerait le tube). On enferme ainsi dans le tube de la vapeur dont la température est encore très voisine de 100° et dont la pression est donc encore très proche de la pression atmosphérique. On sait en effet que lorsqu'un liquide bout, la pression de la vapeur produite est égale à la pression que subit le liquide (ici la pression atmosphérique). En retournant le tube en le tenant avec la pince à linge, vous aspergez par petits coups le tube à essais (4). Que voyez-vous alors ?



3/ on bouche hermétiquement et immédiatement (et cesse de chauffer bien sûr)

Quelque chose de profondément paradoxal : l'ébullition reprend alors qu'on refroidit le tube ! Après quelques instants, elle cesse, il faut alors à nouveau asperger un peu le tube et elle recommence. Que se passe-t-il donc ? Vous venez tout simplement de vérifier que la température d'ébullition de l'eau



4/ On asperge avec de l'eau bien froide

dépend de la pression. Celle-ci agit en effet comme un verrou qui empêche la formation des bulles. Pour que celles-ci apparaissent il faut donc que la température soit suffisante pour que la pression de la vapeur produite contrebalance la pression extérieure. C'est la raison pour laquelle si l'eau bout à 100°C au niveau de la mer, il suffit de 96°C au sommet du Mont Blanc et seulement de 30°C vers 25 km d'altitude; et dans le vide, au-delà des couches les plus élevées de l'atmosphère, l'eau entre en ébullition même à zéro degré.

Lorsque vous avez aspergé le tube, le refroidissement a été plus rapide pour la vapeur que pour la masse d'eau qui présente une grande inertie thermique. La vapeur d'eau ainsi refroidie brutalement se condense en gouttelettes, la pression à l'intérieur du tube chute alors par suite de cette condensation, devient trop basse pour la température encore élevée de l'eau... et l'eau se remet à bouillir !

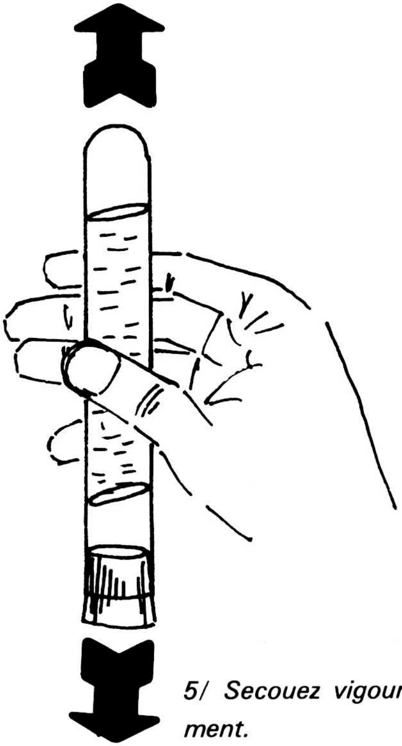
Mais quand un liquide bout, il absorbe de la chaleur et ceci est normal. En effet dans le liquide les particules sont attachées les unes aux autres assez faiblement, ce qui explique qu'un liquide puisse couler, mais elles sont attachées tout de même.

Dans le gaz au contraire, les particules sont totalement libres. Pour que le liquide puisse devenir vapeur, il faut donc que de l'énergie (de la chaleur) soit absorbée pour servir à casser les attaches. D'oû vient donc la chaleur qui permet à l'eau de notre tube de se remettre à bouillir puisqu'on ne chauffe plus ? C'est tout simplement dans sa masse que l'eau, contrainte à bouillir après que le verrou a sauté, doit puiser des calories servant à cette ébullition. Mais alors, puisant ainsi dans ses réserves de chaleur, elle se refroidit. Et à chaque aspersion, l'enchaînement reprend : refroidissement rapide de la vapeur, condensation, chute de pression, ébullition, refroidissement, nouvel équilibre, nouvelle aspersion...

Jusqu'à quand le phénomène continue-t-il ? Tout simplement jusqu'au moment où l'aspersion ne produira plus la condensation ; donc au moment où la température à l'intérieur du tube sera devenue identique à celle de l'eau d'aspersion.

Pour poursuivre l'expérience jusqu'à des températures voisines de zéro, il faudra donc asperger avec de l'eau à zéro degré, vous mettrez donc dans une carafe d'eau des glaçons en quantité suffisante pris au freezer de votre réfrigérateur.

Lorsque le tube tenu à la main vous paraîtra froid (vers 15° C) et que l'eau continuera à bouillir à l'intérieur lors de chacune des aspersions, secouez le bien verticalement (bouchon en bas) d'un coup sec. Vous entendrez alors un bruit insolite, comme si des objets solides et lourds s'y trouvaient secoués ! Si vous ne percevez pas ce bruit, refroidissez le encore et secouez le énergiquement et bien verticalement (attention, il faut pour que cela se produise



bien clairement que le niveau de l'eau soit nettement au-dessus de la moitié du tube).

A quoi est dû ce bruit ? Aussi étrange que cela paraisse, c'est l'eau qui en est seule responsable. Regardez attentivement ce qui se passe quand vous lancez le tube vers le haut pour le secouer ! *La masse d'eau décolle du fond* et une bulle apparaît. Que contient cette bulle, et comment peut-elle se former ? Quand vous aurez répondu à cette question (la seule déduction logique doit vous le permettre) vous aurez trouvé la solution à cette énigme des «Cailloux invisibles»....

5/ Secouez vigoureusement verticalement.

(solution page 17)

SOLUTION DES ECHECS

1. Diagramme N° 1 :

Les blancs en jouant g2-g3 attaquent le Fou noir qui ne peut fuit !

2 . Diagramme N° 2 :

La suite des coups est un peu plus compliquée :

1. De4 X Fb7 De8 X Fe3
2. Rc1-b1 et le pion c7 ainsi que Cd7 sont en prise.

3.Diagramme N° 3 :

1. Tf4 X f5 g6 X Tf5
2. Ch4 X f5 + Re7-f6
3. Cf5-h6 le C blanc f5 est imprenable à cause de la fourchette : Ch6-f7 + qui gagne la tour noire.

4. Diagrammes 4 à 8 :

Le diagramme pour lequel la prise en passant est illégale est le N° 7. En effet les noirs peuvent avoir joué au coup précédent :

-1. . . . Re7-f6

-2. Ce5-c6 + + ! étant le coup blanc précédent. La solution de ce problème est donc :

CLE : 1. Fg6 !

Si.....g5-g4

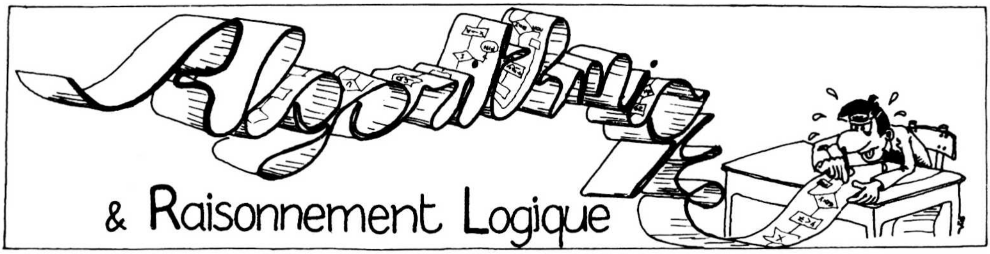
2. Te4-e6 mat

5. Diagramme N° 9

Elémentaire, mon cher watson ! Seul le Roi noir put bouger au coup précédent il vient donc de a7. Mais en a7 il aurait été sous le coup d'un échec de la part du Fou blanc g1 qui lui n'a pu venir en g1 que par la diagonale. Il fallait donc qu'une pièce obstrue son action : c'était donc un Cavalier (puisqu'il ne reste plus trace de cette pièce, elle a été prise). Les coups précédents la position sont donc :

—1. Ra7 X Ca8

—2. Cb6-a8 + (à la découverte).



Problème ARL 77 - Le jeu du 9-5

Disposez côte-à-côte 14 pions sur une ligne. Séparez-les en deux ensembles de 9 et 5 pions. La situation suivante s'offre alors à vous :

Le jeu se joue à deux et chacun enlève à son tour un, deux ou trois pions **consécutifs**. Les pions ôtés ne doivent donc être séparés, ni par un trou vide, ni par un autre pion. Le gagnant est celui qui arrive à prendre le dernier pion.

Y a-t-il un joueur qui est sûr de gagner, et si oui, quelle doit être sa stratégie ?

Au lecteur fidèle, je signale que ce problème a été inspiré par l'excellent PB 105 de l'excellente rubrique PB du PA de mon excellent collègue R. Cuculière de la non moins excellente revue «Le Petit Archimède» dirigée par l'excell... J'arrête là car je vais finir par user ma brosse.

Solution ARL 71-2

Il s'agit de trouver tous les entiers naturels égaux à la somme de leurs chiffres élevés à la puissance n, $n \in \{2, 3, 4\}$.

Nous noterons SCPn (N) la **s**omme des **c**hiffres élevés à la **p**uissance **n** du nombre **N**.

On cherche donc à résoudre l'équation :

$$N = SCPn(N)$$

Nous rechercherons d'abord les valeurs possibles pour le nombre p de chiffres de N en nous basant sur les inégalités.

$$10^{p-1} \leqslant N < 10^p$$

$$\text{et } SCPn(N) \leqslant p \times 9^n$$

qui nous fournissent la condition

$$p \times 9^n \geqslant 10^{p-1}$$

De plus, si p ne vérifie pas cette condition, il en est de même de tout entier supérieur à p, car :

$$p \times 9^n < 10^{p-1}$$

entraîne

$$(p+1)\times 9^n = p\times 9^n + 9^n < 10^{p-1} + 9^n \leqslant 10^{p-1} + p\times 9^n < 10^{p-1} + 10^{p-1} < 10^p$$

Cette propriété servira à borner N dans les différents cas.

n = 2 N ne peut avoir plus de 3 chiffres, car pour $p_o = 4$:

$$4 \times 9^2 = 324 < 1000$$

Il peut par contre avoir 3 chiffres et moins car :

$$3 \times 9^2 = 243 > 100$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sup. } SCP2(N) = 243 \\ N = SCP2(N)\end{array}\right\} \Rightarrow N \leqslant 243$$

$\forall N \in [0,243], SCP2(N) < SCP2(299) = 166 \Rightarrow N \leqslant 165$

$\forall N \in [100,165], SCP2(N) < SCP2(169) = 118 \Rightarrow N \leqslant 117$

$\forall N \in [100,117], SCP2(N) < SCP2(119) = 83 < 100$

$\Rightarrow$ il ne peut y avoir de $N \geqslant 100$

Donc $\boxed{\text{pour } n = 2,\ N \leqslant 99}$

n = 3

$5 \times 9^3 = 3645 < 10\,000 \Rightarrow p < 5$

$4 \times 9^3 = 2916 > 1000 \Rightarrow p \in \{1,2,3,4\}$

$\Rightarrow N \leqslant 2916$

$\forall N \in [0,2916], SCP3(N) < SCP3(2999) = 2195 \Rightarrow N \leqslant 2194$

$\forall N \in [2000,2194], SCP3(N) < SCP3(2199) = 1467 < 2000$

$\Rightarrow$ il ne peut y avoir de $N \geqslant 2000$

donc $\boxed{\text{pour } n = 3,\ N \leqslant 1999}$

n = 4

$6 \times 9^4 = 39366 < 100\,000 \Rightarrow p < 6$

$5 \times 9^4 = 32805 > 10\,000 \Rightarrow p \in \{1,2,3,4,5\}$

$\Rightarrow N \leqslant 32805$

$\forall N \in [0,32805], SCP4(N) < SCP4(39999) = 26325 \Rightarrow N \leqslant 263244$

$\forall N \in [20000,26324], SCP4(N) < SCP4(26999) = 20995 \Rightarrow N \leqslant 209944$

$\forall N \in [20\,000, 20\,994], SCP4(N) < SCP4(20999) = 19699 < 20000$

$\Rightarrow$ Il ne peut y avoir de $N \geqslant 20\,000$

Donc $\boxed{\text{pour } n = 4,\ N \leqslant 19999}$

Maintenant que le problème a été borné, il est facile d'écrire un programme permettant de trouver toutes les solutions.

Par exemple en BASIC, cela peut donner :

```
1Ø  DIM A(4) : A (2) = 99 : A(3) = 1999:A(4) = 19999
2Ø  FOR N = 2 TO4:PRINT:PRINT«N = »;N
3Ø  FOR I = 1 TO A(N): I$ = STR$(I):A = Ø
4Ø  FOR J = 1 TO LEN(I$):A = A + VAL
    (MID$(I$, J,1)) ↑ N:NEXTJ
5Ø  IF ABS (I-A) < .5 THEN PRINT A
6Ø  NEXT I,N
```

Si S_n est l'ensemble des solutions pour n, on obtiendra :

$$\boxed{\begin{array}{l} S_2 = \{1\} \\ S_3 = \{1,153,370,371,407\} \\ S_4 = \{1,1634,8208,9474\} \end{array}}$$

Et l'on sait bien sûr que :

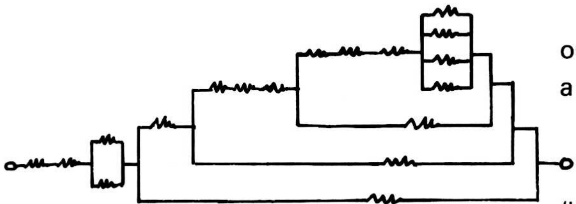
$S_1 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Solution ARL 73

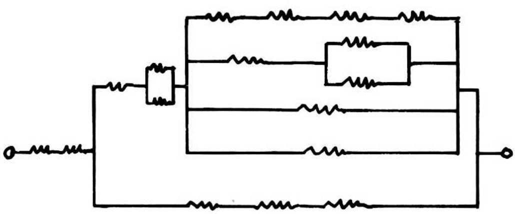
Quel est le plus petit nombre de résistances parfaites de 1 ohm nécessaires à la création d'un réseau qui a une résistance équivalente de $\pi \pm 10^{-6}$ Ohm ?

Lors de la publication de ce problème, j'avais dit avoir trouvé une solution avec 18 résistances (son obtention fut tout à fait empirique, je l'avoue...).

La voici :



Mais un jeune lecteur R. Comte de Paris me battit en trouvant une solution à 17 résistances que voici :



Puis F. Maistre, élève de Terminale C, de Bourg-la-Reine découvrit une solution à 15 résistances, accompagnée d'une lettre fort intéressante que je vous laisse lire :

«Problème ARL 73 : Pi en réseau

1ère partie :

Remarques et principes utilisés

• De par son principe, un réseau de résistances de un Ohm ne peut que représenter des fractions du type :

$\frac{1}{a}$ ou un composé de ces fractions :

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{\dots}}}}$$

ou encore :

$$a+\cfrac{1}{\frac{1}{b}+\dots\frac{1}{x}+\dots}$$

(les nombres a,b,c,...x seront remplacés par des résistances (voir 3ème partie), mais jamais a/b)

Il faut donc mettre :

$$\frac{355}{113}$$

sous l'une de ces formes.

• Transformation d'une fraction

1) si $a < b$ alors on a :

$$\frac{a}{b} = \cfrac{1}{\cfrac{b}{a}}$$

et pour la fraction b/a le numérateur est bien plus grand que le dénominateur.

2) si $a > b$ effectuons la division euclidienne de a par b

$a = bq + r \implies \frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$; $\frac{r}{b}$ est la nouvelle fraction à transformer.

Dans certains cas, il peut être intéressant d'écrire :

$\frac{a}{b} = q\text{-}1 + \frac{r+b}{b}$ ou même autre chose encore.

Exemple :

$\frac{25}{24} = 1 + \frac{1}{24}$

nécessite 25 (1 + 24) résistances, alors que :

$\frac{25}{24} = \frac{3x7+4}{24} = \frac{7}{8} + \frac{1}{6}$ et

$\frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{8}{3}}$ et

$\frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}$ avec $\frac{2}{3} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}}$

soit finalement :

$$\frac{25}{24} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}$$

... qui nécessite 6 + 2 + 2 + 1 + 2 = 13 résistances !!

Il faut donc essayer de toujours garder les fractions dont la valeur exacte est proche de l'unité ; se rappeler aussi que a et 1/a sont des fractions irréductibles.

exemple : pour décomposer $\frac{145}{71}$:

— est **mauvais** :

$$\frac{145}{71} = 2 + \frac{3}{71} = 2 + \cfrac{1}{22+\cfrac{2}{3}} = 2 + \cfrac{1}{22+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}$$

soit 27 (2 + 22 + 1 + 2) résistances. Le '22' provient de la trop grande différence entre 3 et 71.

— est **bon** : $\frac{145}{71} = 1 + \frac{74}{71} =$

$$\ldots = \cfrac{1}{\frac{1}{2} + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}$$

soit donc 13 résistances.

Il est également utile que numérateur et dénominateur ne soient pas premiers.

2ème partie

des résultats : au départ 4 possibilités :

1) $\frac{355}{113} = 0 + \cfrac{1}{\frac{113}{355}}$

2) $\frac{355}{113} = 1 + \cfrac{1}{\frac{113}{242}}$

3) $\frac{355}{113} = 2 + \cfrac{1}{\frac{113}{129}}$

4) $\frac{355}{113} = 3 + \cfrac{1}{\frac{113}{16}}$

remarquons que :

$$\frac{113}{129} = \frac{2.43 + 27}{129} = \frac{2}{3} + \frac{1}{\frac{129}{27}}$$

et $\frac{129}{27} = \frac{43}{9} = 4 + \frac{7}{9}$

(avec $\frac{7}{9} = \frac{1}{\frac{9}{7}}$; $\frac{9}{7} = 1 + \frac{2}{7}$;

$\frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2}$)

On obtient donc :

$$\frac{355}{113} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}} + \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}}$$

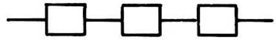
Nous utilisons donc ici 2 + 1 + 2 + 4 + 1 + 3 + 2 = 15 résistances, c'est-à-dire trois de moins que l'auteur.

3ème partie - Interprétation électronique :

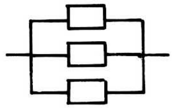
Comment décider si l'on a des résistances mises en parallèle ou en série ?

Pour cela il y a un «truc» : on compte le nombre de barres de fractions qu'il y a au dessus du nombre considéré. Si ce nombre est pair, les résistances sont en **série**, sinon elles sont en **parallèle.**

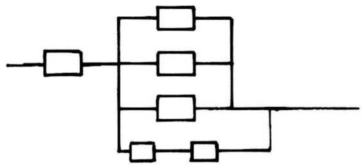
exemple : 3 est représenté par :



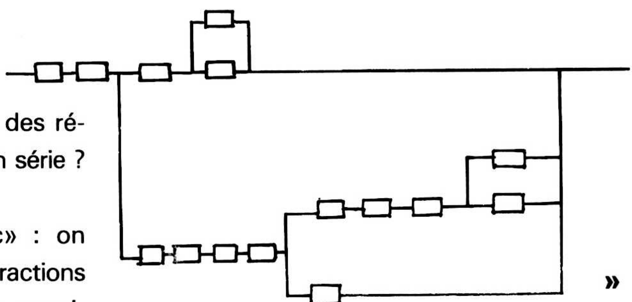
1/3 est représenté par :



$1 + \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}$ est représenté par



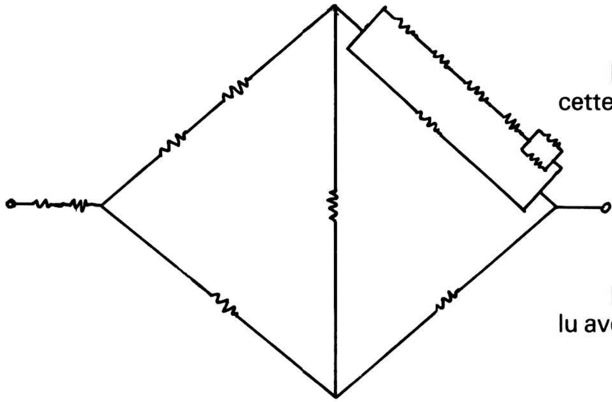
Ainsi $\frac{355}{113}$ est représenté par



»

Mais le journal américain «Byte» qui avait proposé le même problème à ses lecteurs a publié une solution encore meilleure avec seulement 14 résistances.

Cette solution, au lieu d'utiliser le classique réseau série-parallèle, utilise un pont astucieux. Je vous la confie :



Le problème n'est toutefois pas clos, et vous trouverez peut-être une solution à 13 résistances. N'oubliez surtout pas de me tenir au courant (si j'ose dire !...).

Envoyez votre courrier concernant cette rubrique à :

Christian BOYER
Le Petit Archimède ARL
61, rue St Fuscien
80000 AMIENS

Il est attendu avec intérêt et sera lu avec attention.

LES CAILLOUX INVISIBLES SOLUTION :

Vous l'avez certainement deviné, cette bulle est pratiquement une bulle de vide (en fait de vapeur d'eau à très basse pression). Lorsque la température d'équilibre est descendue jusqu'au voisinage de 0°C, et c'est ce qui est arrivé si vous avez aspergé avec de l'eau très froide, la pression de la vapeur au-dessus de l'eau liquide est devenue très basse (environ le centième de la pression atmosphérique). Lorsqu'on lance le tube vers le haut, plus rien ne s'oppose à ce que la masse d'eau décolle par inertie et que le vide apparaisse par en dessous. Dans une bouteille à moitié remplie d'eau et fermée, cette chose est impossible car la pression atmosphérique règne au-dessus de la surface et empêche le mouvement. Mais ici plus d'obstacle ; lorsque l'eau retombe, la bulle ne cherche pas à s'échapper (comme le ferait une bulle d'air en freinant la chute de l'eau). Elle disparaît tout simplement et l'eau retombe en bloc comme une matière solide. C'est parce que la pression est devenue très basse que la masse d'eau se meut dans le tube comme si elle était massive et solide ; d'où le bruit du choc...

I.L.F. du P.A.

«AUX CALENDES GRECQUES» $\supset$ «QUAND LES POULES AURONT DES DENTS»

CALENDAE désignait dans le calendrier romain le premier jour du mois. Ce terme était inusité dans le calendrier grec, d'où :
remettre, renvoyer, ajourner, payer... AUX CALENDES GRECQUES, c'est remettre à une époque qui ne viendra jamais et, par extension, à un avenir très éloigné.

Aux calendes grecques est donc un parasynonyme de **quand les poules auront des dents** puisque cette dernière expression ne s'emploie que dans le sens plus strict de «jamais», d'où le symbole « $\supset$ ».

Calendes, nom féminin, n'est usité qu'au pluriel (comme **ténèbres, entrailles, décombres, funérailles...**). et pourtant E. et J. Goncourt ont écrit dans leur journal (1878) «le payement sera rejeté à quelque CALENDE, qu'on ne verra jamais». Décidément, les BONS AUTEURS ont tous les droits ! Pourquoi pas nous ?

Comment traduire dans une autre langue : **quand les poules auront des dents ?** Les Russes disent **quand l'écrevisse sifflera** et ils précisent ad libitum **sur la montagne** pour rendre la chose encore plus invraisemblable.

Le P.A. aimerait savoir ce que disent les Allemands, les Anglais, les Italiens, les Espagnols, les «etc».

OU CAUSE-T-ON AINSI ?

«Mon nom c'est Zap Plouffe mué-je
«rests au coin dans la maison la».
«Tu va arretez d'lire ça ste mautadite
«affaire de fou la, tu m'attends-tu?»
«Bon, asteur faut serrez mon lavage, je
«lai rentrez jusquavant qu'il mouille».
«Change ton butain, on va allez manger
«sur Chin Lee».
«Ta tu aimez ta ride mon Ti Loup ?»
Avez-vous compris ?
Pouvez-vous fournir une traduction en «français standard» ?

Pour distinguer et définir deux langues on a proposé le critère d'intercompréhension entre deux locuteurs. Certes, entre un Malgache et un Polonais l'intercompréhension voisine «epsilon». Cependant entre un Polonais, un Ukrainien et un Tchèque elle est loin d'être nulle. Alors ?

Quand a-t-on affaire à deux variétés d'un même idiome et quand a-t-on affaire à deux idiomes différents ?

Comment compter les langues ?

Une langue constitue-t-elle un ensemble d'idiomes voisins ?

A-t-on des ensembles disjoints ou une chaîne d'ensembles empiétants ?

Quiconque connaît en plus de l'idiome standard un quelconque patois doit-il être considéré comme bilingue ?

CONTRIBUTION A UN DICTIONNAIRE CUI-CUI-OUAH-OUAH *

Mammifères	**français**	**allemand**	**espagnol**	**italien**	**russe**	**tchèque**
ANE	hi-han	i-a, i-a		ih-ah	i-a	iá
BŒUF	meûh	muh-muh		muh	mu	bú
CHAMEAU	blatt		brrr			
CHAT	miaou	miau	miau-miau	miao ronron	mjau murrr	mňau
CHEVAL	hiii	i-ha-ha	hihihi	iiih	igogo	ihahá
CHEVRE	meh	mek-mek	behehe			mé
CHIEN	ouah	bau	guauguau	bau-bau grr	gav-gav	
COCHON	grouin		ônônôn	grui-grui	hrju-hrju	
ELEPHANT	xhah					
HYENE				ah ah	u-ga-ga	
LION	groarrr		grgr	argh	garrr	
LOUP	hou, hou			uh	u-u-u	
MOUTON	bê		uhuhuh	bee	b-e-e	bé
RAT				squik		
RENARD						
TIGRE	grr-grr			argh		
VACHE	meûh	muh-muh	mmm	muh	mu	bú
BEBE	ouin		guagua	uè	ua	

Le P.A. remercie vivement Renaud, Klaus, Jaime, Serena, Katja, Dagmar pour leur précieuse contribution grâce à laquelle il a été possible de poser les premiers jalons d'un «trésor» cui-cui-ouah-ouah.

Notre aimable lecteur a remarqué que ce tableau n'est ni fiable, ni complet. Il y a peut-être des erreurs grossières, voire d'«orrhibles fôtes d'hortogaf-

* Par souci de rigueur scientifique le P.A. a été fidèle aux transcriptions fournies par ses informateurs, sauf pour le russe, ne possédant pas de caractères cyrilliques, il s'est conformé aux recommandations d'I.S.O. AFNOR (cf. P.A. N° 73-74, p. 30).

fe» ! Les lacunes sont nombreuses, est-ce par ignorance ou parce que certains animaux sont muets comme des carpes dans certaines langues ?

A l'instar du TRESOR DE LA LANGUE FRANÇAISE, le P.A. a conçu la folle entreprise d'un TRESOR POLYGLOTTE CUI-CUI-OUAH-OUAH. Il croule sous la tâche et crie S.O.S. à tous ses lecteurs de bonne volonté.

Sur les environ 3000 langues du monde, il n'a pour l'instant que 6 informateurs natifs. C'est peu. Et puis, après les mammifères il faudra étudier les oiseaux, les insectes, les reptiles...

Bien plus, le P.A. est assailli par toutes sortes de questions théoriques auxquelles il ne sait pas répondre. Il n'en dort pas la nuit.

Et d'abord, les animaux parlent-ils ?
Mais, que veut dire «parler» ?

Est-ce s'exprimer en un certain code ; si oui, exprimer quoi et comment ?

Papa et maman âne apprennent-ils à braire au petit ânon ? Le «hi-han» est-il héréditaire ou acquis ?

Les ânes de Mongolie ou les ânes de sa gracieuse Majesté causent-ils le même asinien ? Y a-t-il des ânes polyglottes ?

L'asinien est-il une langue avec des sons pour former des mots, des mots pour construire une phrase et des phrases pour aboutir à un discours ?

Peut-on ouvrir en asinien une rubrique comme «vous les avez vu naître» Autrement dit, la néologie et la datation des mots nouveaux sont-elles concevables ?

Peut-on imaginer un code écrit et un code oral, faire des dictées à l'apprenant-âne, puis lui faire «ramasser une veste» s'il brait mal ?

Une dernière question, aimable lecteur, après avoir consulté le dictionnaire cui-cui-ouah-ouah, peut-on en déduire dans quel pidgin s'exprime le loufoque ?

Malgré ses insomnies, le P.A. ne lâchera pas le manche après la cognée et quêtera l'information auprès des linguistes compétents. Il vous en fera part prochainement.

Y A PAS MOYEN DE CAUSER !

Pour causer, il faut ouvrir la bouche, mais cela hélas ne suffit pas. Les psycho-, socio- et autres linguistes nous enseignent en effet que :

1- On ne cause pas de la même façon au Président de la République et à sa petite amie, donc sans tenir compte de ce que l'on pense de son vis-à-vis, interlocuteur, auditeur, partenaire, comparse, récepteur, récipiendaire, énonciataire, deutéragoniste, locuté (il y en a d'autres, la langue française est riche).

2 - Selon qu'on se prend pour une mauviette ou pour une super-star on s'écrase ou l'on écrase ;

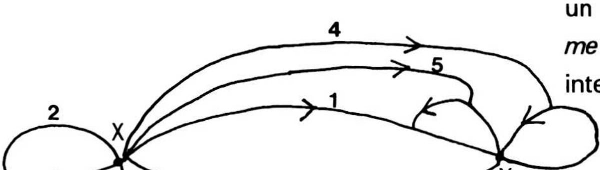
3 - Selon qu'il vous prend pour un surdoué ou pour un sous-doué, on prend le ton qui s'impose ;

4 - Selon qu'il se prend pour Napoléon ou pour un asticot vos propos prennent un tour différent ;

5 - Selon ce que vous pensez sur ce qu'il pense que vous pensez lui répondre, pour peu que vous soyez un tantinet flagorneur, vous lui passerez la pommade qu'il désire et non ce que vous pensez.

Bref, selon que vous (x)..., selon que lui (y)..., selon que vous (x)..., selon que lui (y)..., Vous avez compris ? Continuez.

Le P.A. a résumé ces considérations par le schéma que voici. Une flèche symbolise ce qu'un individu pense de lui-même ou d'autrui.



Osez ouvrir la bouche avant d'avoir pensé à tout !

Problème : Que se passe-t-il lorsque vous avez affaire à 2, à 3, à n interlocuteurs qui vont et qui viennent ?

Alors, dites-vous bien que si vous arrivez à sortir quelque chose de convenable, c'est que vous êtes suprêmement intelligent !

MATHEMATIQUE, OU VAS-TU TE FOURRER !

Un froid de canard, un froid à pierre fendre,
Un vent du diable, un vent à décorner les bœufs,
Un travail d'Hercule, travailler comme un forçat
Sourd comme un pot,
Bête à pleurer,
Connaître à fond,
.....
Pleuvoir des cordes, pleuvoir comme vache qui pisse...

Problème : Qu'y a-t-il de commun entre les *«canards»* et les *«vaches qui pissent»* ?
Il y a que *«un froid de canard»* c'est un froid très intense, et *«pleuvoir comme vache qui pisse»*, c'est pleuvoir très intensément. On notera donc :

MAGN (*froid*) = *de canard,*
à pierre fendre
MAGN (*pleuvoir*) = *des cordes,*
comme vache qui pisse...

Mais on ne peut pas dire : *Pleuvoir à pierre fendre, bête à décorner les bœufs, sourd comme vache qui pisse...*

Une même idée d'intensité, selon le mot auquel on l'applique, va s'exprimer de façon particulière. Ou encore, une même fonction, notée MAGN peut s'appliquer à diverses variables (*froid, vent, travail...*) en leur associant des ensembles de valeurs déterminées. Nous sommes en pleines mathématiques.

Continuez : MAGN *(peur)* = ? MAGN (*dormir*) = ?

Mais il y a plus :

Le vin aigrit, le fait tourne, le beurre rancit, la vue baisse, le franc se dévalue, le pouvoir d'achat diminue... d'où :

DEGRAD (*vin*) = aigrir,... DEGRAD (*pouvoir d'achat*) = *diminuer*

La neige crisse, la grêle crépite, le réveil sonne, la porte grince, le moteur vrombit, la pie jacasse, le chameau blatère, le rossignol chante...

SON (*neige*) = *crisser,* SON (*rossignol*) = *chanter.*

Le Président de la République, le capitaine du régiment, le P.D.G. d'une entreprise, le maire d'une ville, le chef de gare...

CAP (*république*) = *président*,
CAP (*gare*) = *chef*

Un rêve se réalise, une hypothèse se confirme, une condition est satisfaite, une menace est mise à exécution, un hold-up a lieu...

FACT (*rêve*) = *se réaliser*, FACT (*hypothèse*) = *se confirmer...*

Le linguiste russe Igor Aleksandrovič MEL'ČUK pense qu'un grand nombre sinon la plupart des phénomènes liés au sens peuvent être décrits à l'aide d'une cinquantaine de FONCTIONS LEXICALES et de leurs combinaisons.

Pouvez-vous relever la gageure de Mel'čuk, êtes-vous *pour, contre* ?

A vous la parole !

A UN RIEN PRÈS !

d'après «*The Mathematical Gazette*»

1 - Calculer $\frac{1}{\pi}$ avec trois décimales.

2 - Calculer $(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ avec trois décimales.

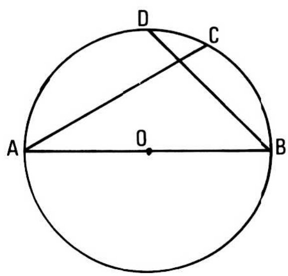
3 et 4 - Quels sont les inverses de $\frac{1}{\pi}$ et de ($\sqrt{3} - \sqrt{2}$[5 !

5 - Quelles sont leurs valeurs rapprochées avec deux décimales ?

6 - Qu'en déduirait un lecteur peu sérieux, s'il s'en trouvait ?

Dans un cercle, on a tracé deux cordes, l'une AC est le côté du triangle équilatéral inscrit, l'autre BD le côté du carré inscrit.

Comparer la longueur du demi-cercle de diamètre AB à la somme (AC + BD). (Il existe des constructions de la longueur du demi-cercle beaucoup plus précises que celle là, mais aucune ne peut se faire exactgement au moyen de la règle et du compas).



RABELAIS GEOMETRE... ET LE NOMBRE π

Au livre V (chap. XLII) Rabelais décrit une fontaine en forme d'heptagone régulier.

On a pensé que ce texte obscur était à l'état de brouillon à la mort de Rabelais. Celui qui se serait ensuite chargé de la publication aurait pu prendre le texte tel quel, sans préjudice des erreurs de lecture.

Mais il n'est pas mauvais de se «tarabuster l'entendement» sur un texte apparemment sans queue ni tête, pour en extraire la «substantifique moelle».

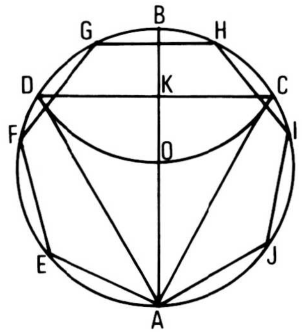
Prenons le texte à partir de «En estait l'assiette en telle composition...».

Le texte de Rabelais

En estait l'assiette en telle composition que, projetant la veue derrière l'une, quelle que fust en sa cule, pour regarder les autres opposites, trouvions le cône pyramidal de notre ligne visuale finer au centre susdit, et là, recevoir, de deux opposites, rencontre d'un triangle équilatéral...

L'interprétation possible :

La configuration en était telle que, se plaçant derrière une colonne quelconque (par exemple en A) pour regarder les autres, notre regard s'arrêtant sur le centre de la fontaine, nous obtenions de part et d'autre (avec B comme centre et BO comme rayon) un côté (DC) du triangle équilatéral inscrit dont les deux autres côtés (DA et CA) aboutissaient à l'axe de la colonne.



AJ = DK

...duquel deux lignes partissaient également la colonne (celle que voulions mesurer) et passante d'un costé et d'autre, deux colonnes franches à la première, tierce partie d'intervalle, rencontraient leur ligne basique et fondamentale...

De part et d'autre des côtés du triangle passaient deux colonnes à partir de la première et un tiers de l'arc sous tendu par deux colonnes voisines (l'arc AD a pour mesure, en effet, très exactement, 2 fois 1/3 celle de l'arc AE) avant de rencontrer la base (DC) du triangle.

... laquelle par ligne casuelle portraicte jusques au centre universel, également mi partie, rendait en juste départ la distance des 7 colonnes...

laquelle base, partagée en deux parties égales (DK et KC) par la ligne (OB) tracée fortuitement (par notre ligne visuelle) jusqu'au centre, et elle même divisée en deux parties égales (OK et KB) donnait, en partant d'une de ses extrémités, (en DK) le côté de l'heptagone.

On sait qu'il n'existe pas de procédé théoriquement exact pour construire l'heptagone régulier mais, par certaines «astuces de métier» on peut l'avoir avec une précision suffisante. En particulier en prenant, comme ci-dessus, pour côté de l'heptagone, la moitié du côté du triangle équilatéral inscrit dans le même cercle. L'erreur théorique est acceptable : 2 mm pour un heptagone construit dans un cercle de 1 mètre de rayon.

Il existe des procédés théoriquement plus précis, mais la simplicité du «trait» dans celui-ci, éliminant une grande partie des erreurs dues aux instruments (règle et compas) et à celui qui les tient, fait que ce moyen est, pratiquement, un des meilleurs.

C'était, vraisemblablement, un secret des compagnons de l'époque. Secret tout relatif d'ailleurs, puisque Dürer signale le procédé dans un ouvrage paru en 1525.

Mais continuons :

... et n'était possible faire rencontre d'autre colonne opposite par ligne directe principiante à l'angle obtus de la marge comme vous savez qu'en toute figure angulaire impare, un angle toujours est au milieu des deux autres trouvé intercalant.

et il n'y avait pas deux colonnes diamétralement opposées car vous savez que, dans un polygone régulier au nombre impair de côtés, il n'y a pas deux sommets diamétralement opposés.

LA CHASSE AUX PARTICULES (suite BD 2)

MADEMOISELLE, SOYEZ LA BIENVENUE AU CERN!
MERCI MONSIEUR!
C'EST GENTIL À VOUS, Mlle KITTY, DE M'AVOIR INVITÉE.
VOUS ALLEZ VOIR TOUT À L'HEURE LES INSTALLATIONS QUE NOUS UTILISONS POUR NOS RECHERCHES.
VOICI HANS...
...ET CARLO!
D'EMBLÉE, JE VOUS DIRAI QUE LE CERN NE S'INTÉRESSE PAS AUX APPLICATIONS DE L'ÉNERGIE NUCLÉAIRE.
CHEZ NOUS, L'ESPION PERD SON TEMPS: RIEN N'EST SECRET ET TOUS NOS RÉSULTATS SONT PUBLIÉS.
NOUS FAISONS DE LA RECHERCHE PURE, MADEMOISELLE!
LA RECHERCHE EFFECTUÉE AU CERN EST APPELÉE "PHYSIQUE DES PARTICULES" PARCE QU'ON Y ÉTUDIE LES PARTICULES FONDAMENTALES ET LEUR COMPORTEMENT.
ON PARLE AUSSI DE "PHYSIQUE DES HAUTES ÉNERGIES" PARCE QU'ON A BESOIN D'ÉNERGIES TRÈS ÉLEVÉES POUR PRODUIRE DES PHÉNOMÈNES INTÉRESSANTS AVEC DES COLLISIONS DE PARTICULES.
CES HAUTES ÉNERGIES SONT FOURNIES PAR DE GRANDES MACHINES APPELÉES "ACCÉLÉRATEURS". TOUTES CES MACHINES, AU CERN, ACCÉLÈRENT DES PROTONS.
LE PRINCIPE DE L'ACCÉLÉRATION EST ASSEZ SIMPLE. RAPPELONS TOUT D'ABORD QUE LE PROTON PORTE UNE CHARGE ÉLECTRIQUE POSITIVE ET QUE L'ÉLECTRON PORTE UNE CHARGE NÉGATIVE.
SI L'ON FAIT PASSER UN PROTON AU TRAVERS DE DEUX PIÈCES DE MÉTAL RELIÉES À UNE PILE DE 1,5 VOLT...
1½ V
...IL SERA POUSSÉ PAR LA PIÈCE "POSITIVE" ET ATTIRÉ PAR LA PIÈCE "NÉGATIVE".
AINSI, PAR CET PETIT "COUP DE PIED" À NOTRE PROTON, ON VA AUGMENTER SON ÉNERGIE D'UNE QUANTITÉ DE 1,5 ÉLECTRONVOLT (1,5 eV).
DANS LES ACCÉLÉRATEURS DU CERN, CE COUP DE PIED EST MULTIPLIÉ PAR DES MILLIARDS, CE QUI DONNE AUX PROTONS UNE TRÈS HAUTE ÉNERGIE.

(à suivre)

On ne s'attendait pas à une telle leçon de géométrie.

Mais il semble qu'il faille déchanter ensuite :

«En quoy nous estait tacitement exposé que sept demis diamètres font, en proportion «géométrique, amplitude et distance, peu moins telle qu'est la circonférence de la «figure circulaire, de laquelle ils seraient extraits, sçavoir est trois entiers et une huitiè- «me et demie, peu plus, ou un septième et demie, peu moins, selon l'antique adver- «tissement d'Euclides, Aristotéles, Archimèdes et autres».

Or, 7 demis diamètres, cela donne 3, 5 D. π à 3,5, c'est un peu cher. On était mieux renseigné à l'époque et Rabelais, qui avait puisé aux bonnes sources pour son heptagone, semble s'être quelque peu fourvoyé.

Et il ne s'en tire pas mieux quand il veut donner un encadrement à π.

$3 + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 3{,}1875 \ldots \qquad 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} = 3{,}214\ldots$

L'oiseau n'est pas dans la cage.

Il est étonnant qu'un texte qui commence si bien finisse si mal.

Reprenons le :

«EN QUOY nous était tacitement exposé...«

On ne voit pas la raison de cet «en quoy» s'il n'y a aucun lien entre les deux parties du texte.

Ce qui se «voit» sur la figure, c'est que le périmètre de l'heptagone est un peu inférieur à celui du cercle (peu moins) et que ce périmètre de l'heptagone ainsi construit est égal à 7 fois le demi côté du triangle équilatéral.

Alors donnons au mot diamètre son sens grec original (n'oublions pas que Rabelais se fit chasser de son couvent pour trop aimer le grec) de «ligne diagonale», c'est-à-dire ligne qui passe à travers. Ce qui peut s'appliquer à n'importe quelle corde. Si la corde en question est celle qui nous a servi, en la partageant en deux, à construire l'heptagone, c'est le côté du triangle équilatéral inscrit.

Dans un cercle de diamètre 1, cette corde mesure $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Ce qui donne une valeur approchée de π

$\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{7}{2}$ = 3,0310..... «peu moins»

Ce qui est une bonne approximation.

Quant à l'encadrement, nous l'aurons, partant toujours du côté du triangle équilatéral, si nous traduisons :

«3 et une huitième et demie» par «3 et demi (les sept demis de la première évaluation) et un huitième», cela donne :

$3 + 0{,}5 + \frac{1}{8} = 3{,}625$ de même $3 + 0{,}5 + \frac{1}{7} = 3{,}6428...$

Ce qui donne pour l'encadrement :

$\frac{\sqrt{3}}{2} \times 3{,}625 = 3{,}139...$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 3{,}642... = 3{,}154...$

Encadrement très correct avec un milieu à 3,1465...

La leçon de géométrie est donc complète.

M.P.

SOLUTION «DES CARRÉS DANS UN RECTANGLE»

(PA 75-76, page 43)

On calcule les côtés de proche en proche.

AB = 2a + 18b ; CD = 4a + 4b

2a + 18 b = 4 a + 4 b

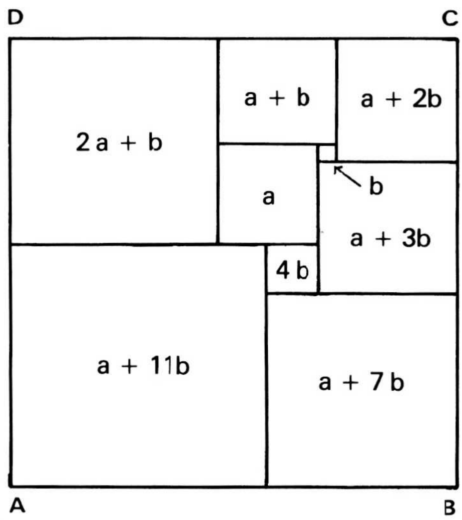
14 b = 2 a

7b = a

AB est le plus petit possible si b = 1

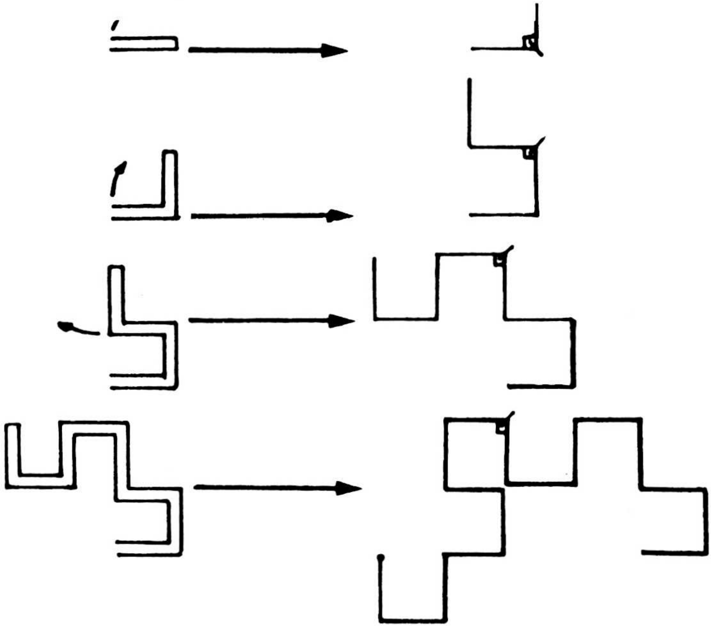
b = 1 ; a = 7

AB = 32 AD = 33



PLIAGES
LA COURBE DRAGON III

Vous pliez une bande de papier en deux,puis en deux, etc... un nombre quelconque de fois. Puis vous la dépliez en vous assurant que le dernier pli se transforme en un angle droit (fig. 1). On obtient ainsi une courbe possédant 2^n segments et l'une des questions que nous proposions à votre sagacité consistait à trouver, sans traçage évidemment, l'orientation du $p^{ième}$ segment (gauche, droite, haut, bas).



etc. *etc.*

fig. 1

REPONSE :

— Reprenons le mode de construction.

— Initialement le premier segment est orienté à droite : D.

— Après dépliage le deuxième segment est orienté en haut : H.

— Après le second dépliage les deux premiers segments seront toujours DH, le troisième sera le transformé du second, c'est-à-dire G, et le quatrième le transformé du premier soit H.

On passe donc d'une courbe à la suivante :

1 - en recopiant le mot initial

2 - en lui juxtaposant son symétrique,

transformé par le code :
D ⟶ H, H ⟶ G, G ⟶ B, B ⟶ D.

Ainsi on obtiendra successivement:

D ⋮ H ⋮ GH ⋮ GBGH ⋮ GBDBGBGH ⋮ GBDetc
1 2 3 4 5

On peut donc écrire d'une façon simple (sinon facile à mettre en œuvre) le mot représentant la $n^{\text{ième}}$ courbe.

Reste à connaître la lettre dont le numéro d'ordre a été donné à l'avance. Pour cela, il suffit de savoir en combien de pliages on peut amener ce segment en coïncidence avec le premier : 1 pliage donnera H, 2 pliages G, 3 pliages B, 4 pliages D, 5 de nouveau H, etc.

Le calcul du nombre de pliages se fait de la façon suivante : on veut connaître l'orientation du segment N° 19 par exemple.

a) on diminue d'une unité, on obtient 18.

b) on convertit en numération binaire, on obtient 10010.

c) on effectue l'addition avec le même nombre décalé, sans tenir compte des retenues éventuelles :

```
 10010
10010
------
110110
```

d) on enlève le dernier chiffre, il reste 11011.

e) le nombre de 1 indique précisément le nombre de pliages ici 4 donc le dix-neuvième segment est dirigé vers la droite (D).

Ce mode de calcul est étroitement lié au code binaire de Gray dont nous aurons l'occasion de reparler.

LE PROBLEME DU PERIMETRE

Lorsqu'on trace une courbe comportant un grand nombre de segments, on constate qu'un grand nombre de ceux-ci définissent des carrés dans la zone couverte par la courbe (fig. 2). Il peut alors être intéressant de ne tracer que le contour, c'est-à-dire de construire à l'aide des lettres GHDB, le mot

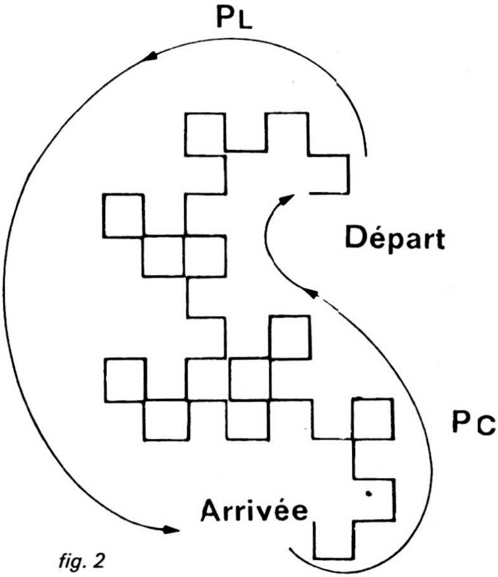


fig. 2

représentant le «périmètre». Pour cela on distingue le «périmètre long» et le «périmètre court» (fig. 2). La figure 3 fait mieux comprendre l'intérêt de cette distinction.

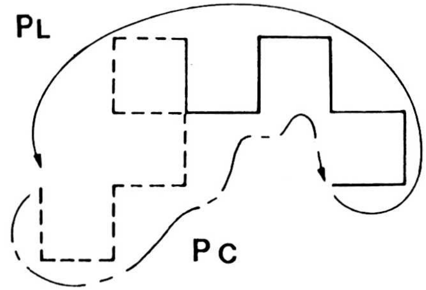
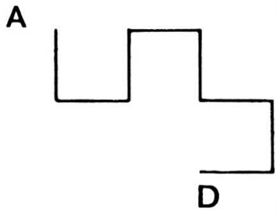
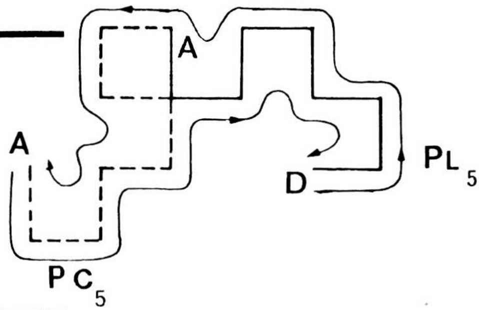


Fig. 3



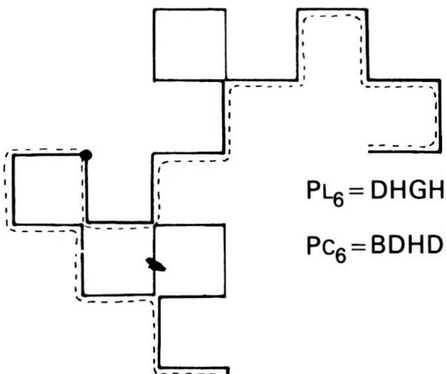
$PL_4 =$ DHGHGBGH

$PC_4 =$ BDHDBDBG



$PL_5 =$ DHGHGBGH.GBDBGBGH

$PC_5 =$ BDHDH $\underbrace{\boxed{\text{GHD.B}}}_{\text{carré}}$ DHDBDBG



$PL_6 =$ DHGHGBGHGBDBGBGH. GBDBDBDBGBGH

$PC_6 =$ BDHDHGHDHGBGHGHD. BDHDHDHDBDBG

carré

carré

= BDHDHGHDHGHDHDHDBDBG

$$PL_{n+1} = PL_n\widetilde{PC_n}$$

$$PC_{n+1} = \widetilde{PL_n}PC_n \text{ et simplification}$$

LE NOMBRE D'OR *(suite 1)*

Quelqu'opinion qu'on ait sur l'importance du Nombre d'or dans l'Art ou en Architecture, on ne peut lui dénier un certain nombre de propriétés arithmétiques.

Il est supérieur de 1 à son inverse, inférieur de 1 à son carré.

$\frac{1}{\Phi}$, Φ et Φ^2 ont la même suite de décimales.

$\frac{1}{\Phi} = 0{,}618\ldots \quad \Phi = 1{,}618\ldots$

$\Phi^2 = 2{,}618$

Pour des raisons de typographie, nous désignerons le nombre d'or par A et son inverse par A'

On peut établir que $A^n + (-1)^n A'^n$ est un entier.

Supposons la propriété vraie au rang n.

Elle est vraie pour n = 1 : $A - A' = 1$.

Soit : $P_n = A^n + (-1)^n A'^n$. Multiplions P_n par $(A-A')$.

$[A^n + (-1)^n A'^n](A-A') =$

$A^{n+1} + (-1)^{n+1} A'^{n+1} -$
$[A^{n-1} + (-1)^{n-1} A'^{n-1}]$.

$P_n = P_{n+1} - P_{n-1}$

Léonard de Pise dit
Léonard Fibonacci (1170 ? - 1250 ?)

$P_{n+1} = P_n + P_{n-1}$

P_{n+1} somme de deux entiers est un entier.

Ainsi la propriété vraie au rang n, l'est au rang (n + 1).

Or, elle est vraie au rang 1 donc elle est vraie pour tout n.

De plus, on a établi que :

$P_{n+1} = P_n + P_{n-1}$

or $P_1 = 1$ et $P_2 = 3$

les P_n font partie d'une suite analogue à la suite de Fibonacci : 1, 3, 4, 7, 11, 18

Les lecteurs partant de : $A^2 = A + 1$ sauront exprimer les puissances successives du nombre d'or A. Ainsi : $A^3 = 2A + 1$

MP

P.A. - JEUX :

IL Y A DU NOUVEAU !

Un nouveau jeu : ALADIN

Non, la rubrique de HEX n'est pas terminée, mais je ne puis résister au plaisir de vous faire découvrir ALADIN. Ce jeu est l'adaptation que j'ai faite d'un jeu de Jean-Claude ROSA, «Troll» bientôt dans le commerce, qui, lui, se pratique sur un quadrillage 8 X 8

MATERIEL - un tableau en forme de losange constitué de cases hexagonales (voir diagramme 1)
- 36 pions **réversibles** (noir et blanc)

BUT DU JEU : Chacun des deux joueurs veut construire une chaine continue reliant les deux bords de sa couleur (but identique à celui du HEX).

MARCHE DU JEU : Blanc commence, puis les deux joueurs jouent alternativement. On ne peut pas passer son tour.
Deux types de poses sont envisageables
1- la pose simple : consiste à poser un pion de sa couleur. Cette pose est autorisée sur toutes les cases *sauf* sur les bords adverses (coins compris). (diagramme 1). Une pose simple n'a donc aucun autre effet que d'ajouter un pion sur le tableau.

2 - la pose-retournement : consiste à poser un pion de sa couleur *entourant* un ou *plusieurs* pions adverses placés en ligne et côte à côte. Ceci pouvant avoir lieu dans plusieurs directions à la fois. Ces pions adverses entourés par la *dernière* pose, *doivent* alors être *tous retournés* et ce dans toutes les directions (voir diagrammes 2 et 3).
important : les poses-retournements peuvent être effectuées en posant un pion *n'importe où* (y compris les bords adverses et les coins) (voir diagramme 1)

GAGNANT : le premier qui, après une pose de pion (simple ou non) aura constitué une chaîne continue reliant ses deux bords.

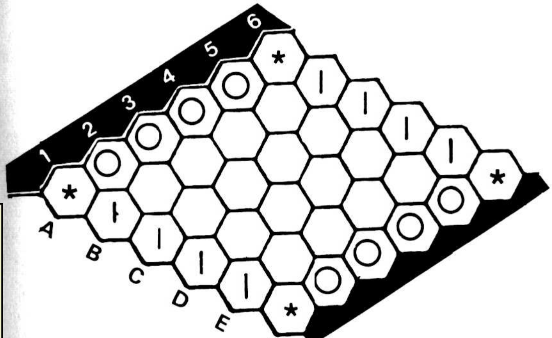


Diagramme 1

Légende :
Cases sur lesquelles :
O : Blanc ne peut jouer qu'en retournant
I : Noir ne peut jouer qu'en retournant
*** :** Blanc et noir ne peuvent jouer qu'en retournant.

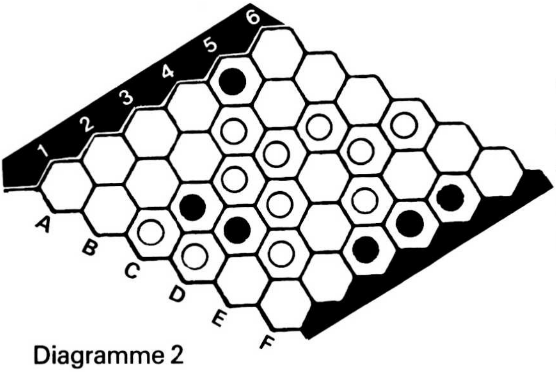


Diagramme 2

Voici une position de jeu :
C'est à Noir de jouer. Blanc menace de joindre ses deux bords par E1.
Noir décide de retourner plusieurs pions Blancs en jouant C6

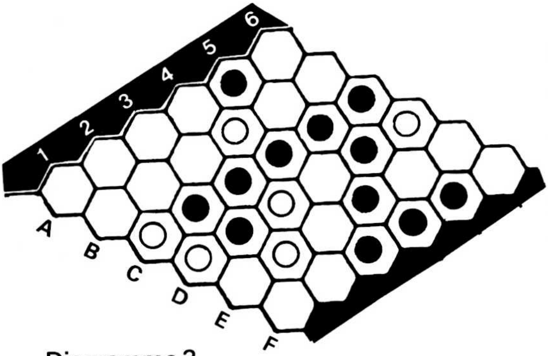
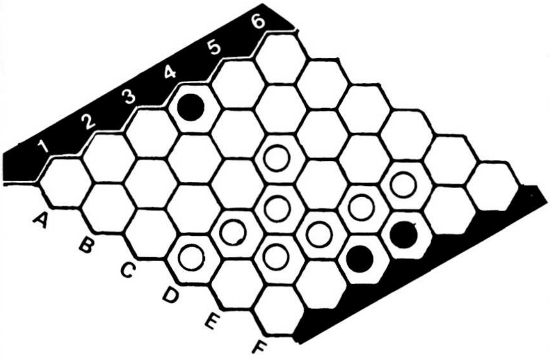


Diagramme 3

Position après le coup noir : C6.
Cinq pions blancs sont devenus noirs, ceux qui étaient entourés *par le premier coup C6* : Notez bien que le pion Blanc B5 n'a pas été retourné ! (il ne fait partie d'aucun alignement partant de C6).

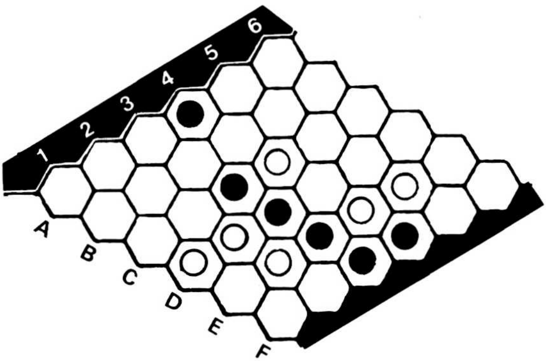
ALADIN peut également se pratiquer sur de plus grands espaces ! Pour les amateurs je conseillerai le 8 X 8 (toujours sur hexagones) le jeu change alors de nature.

ALADIN
une partie commentée



Position après 11 E2

B		N	
1	D1	2	F3
3	C4	4	E4
5	D2	6	D3
7	E3	8	A4
9	E5	10	F4
11	E2	12	C3 !
13	abandon*		



Position après 12 C3 !

* les blancs ne peuvent plus faire face:

si 13 D4	14 B 4 !	gagne
si 13 B4	14 B 3	gagne
si 13 B 3	14 A 3	gagne
si 13 C 2	14 B 3	gagne

Les parties de ALADIN 6 X 6 sont en général *très courtes*. De toutes façons elles ne peuvent excéder 36 coups et doivent se terminer par un gain (les joueurs de Hex l'auront bien compris). Il est amusant de jouer à ALADIN sur plusieurs parties ! Néanmoins chaque partie doit demander un *maximum d'attention* et de ruse car ALADIN ne pardonne aucune faute !

La Rubrique Jeux continue, elle deviendra ce que vous en ferez. Si vous connaissez des petits jeux de réflexion amusants, écrivez-nous : pour toute correspondance, observations, remarques, demande de renseignements, etc....

Francis GUTMACHER
P.A. JEUX
61, rue St Fuscien
80000 AMIENS

ECHECS

PROPOS DE RENTRÉE

Les vacances terminées laissent la place aux activités scolaires. J'espère que chacun a profité pleinement de son repos et que tous les lecteurs sont en pleine forme.

Que s'est-il passé dans le domaine Echiquéen ? Je vais vous faire part de quelques unes de mes découvertes de l'été.

Les petites machines d'abord. Eh bien, cela marche fort pour elles. Les championnats tous plus ou moins du monde se succèdent à un rythme accéléré. Il est à croire que le titre est en jeu chaque semaine. Les renseignements que l'on peut donner deviennent trop rapidement obsolètes pour que l'on puisse indiquer valablement la force relative de tel ou tel modèle. Ce qui est sûr, c'est que ces petites bêtes jouent de mieux en mieux en occupant une place de plus en plus petite.

Voici une poignée d'exemples tirés d'un récent championnat.

Dans le diagramme N° 1, Super System qui joue avec les blancs n'a pas trouvé le coup qui lui aurait donné un avantage matériel. Et vous ?

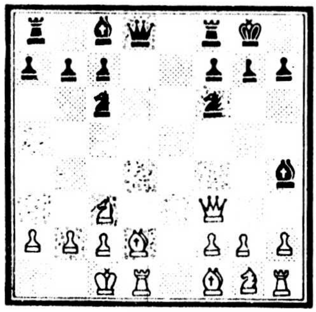


diagramme 1

Dans le diagramme N° 2, Méphisto (qui joue avec les noirs) vient de jouer : Fc8-b7 ? Trouverez-vous la réponse de Super system qui gagne un pion ?

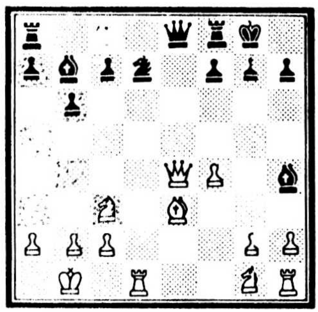


Diagramme 2

Toujours Super system a l'honneur dans le diagramme N 3 où il prend un joli avantage sur son adversaire : Morphy (du nom du célèbre joueur américain). Saurez-vous trouver ?

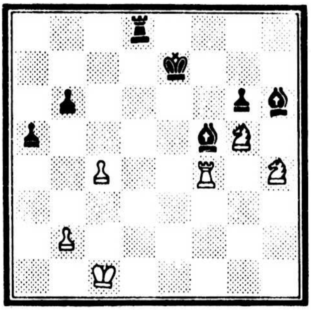


Diagramme 3

Cependant ces petits monstres commettent encore bien des erreurs, en particulier dans les fins de parties domaine dans lequel les machines -ou plutôt leurs programmes- auront besoin de beaucoup travailler pour arriver au niveau d'un joueur humain de club.

Je change totalement de domaine pour vous parler d'une jolie série de problèmes parue dans la revue Britannique : —the problemist—. Ce sont des deux coups dans lesquels la clé est une prise en passant. Cette faculté est intéressante pour le compositeur de problèmes parce que c'est le seul cas dans lequel, lors d'une prise, la pièce prenante ne prend pas la place de sa victime. La prise en passant n'est justifiée et légale dans un problème que si l'on peut prouver que le seul coup possible des noirs était l'avance de deux pas d'un pion AU COUP PRECEDENT la position donnée.

Pour m'expliquer plus clairement, voyons l'exemple du diagramme N° 4. Quel a été le dernier coup noir ? Le roi ne pouvait venir ni de g8 ou il aurait été sous le feu de deux échecs par les deux cavaliers blancs, ni de g7 pour la même raison, ni de g6 ! Le pion noir

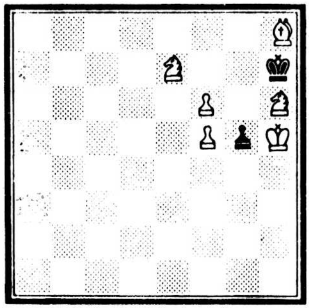


Diagramme 4

a donc effectué le dernier coup, mais il ne peut venir de g6 où il aurait donné échec au roi blanc, échec qui n'aurait pas été paré, il vient donc de g7 ! La clé : f5 x g5 en passant est donc justifiée.

J'espère que vous vous amuserez à résoudre ces petits problèmes (diagrammes N° 4 à 8) tous EN DEUX COUPS. Il faudra penser chaque fois à démontrer la validité de la prise en passant. D'ailleurs un de ces problèmes est un leurre : pas de prise en passant. Devinez lequel !

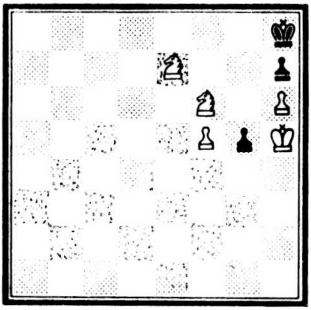


Diagramme 5

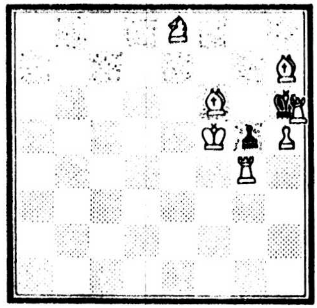


Diagramme 6

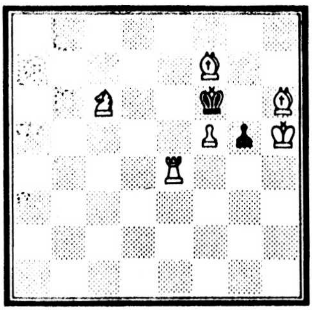


Diagramme 7

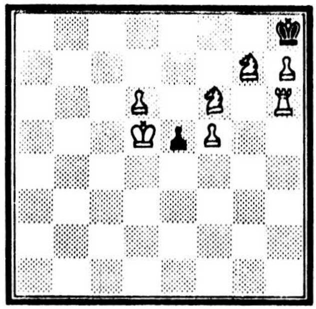


Diagramme 8

La prochaine fois, je vous parlerai d'un remarquable ouvrage sur cette technique d'analyse à l'envers : il faut découvrir le passé d'une partie. Pour vous mettre l'eau à la bouche, je vous donne une de ces positions, tirée de ce livre de Raymons SMULLYAN : THE CHESS MYSTERIES OF SHERLOCK HOLMES. Les noirs viennent de jouer Watson ! Quel a été leur dernier coup Vous donnerez aussi le coup blanc précédent (Diagramme N° 9).

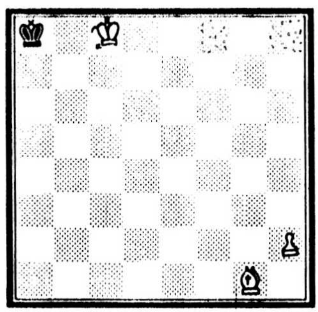


Diagramme 9

Bonne recherche, ne regardez pas trop vite en page de votre P.A.

PETIT PHILIDOR

BELLE, LA BRUTE INTELLIGENTE

Les participants à la «septième conférence unifiée sur l'intelligence artificielle», à Vancouver en août 81, ont pu assister à l'exposé de Hans Berliner intitulé «Examen de l'intelligence par force brute» (1). Cette communication était essentiellement consacrée aux programmes d'ordinateurs jouant aux échecs et plus particulièrement à une étude de Belle la championne du monde en titre des ordinateurs. Même quand on n'est pas un joueur, on reste fasciné par ce jeu et les prouesses que les spécialistes peuvent faire par ordinateur interposé.

Tout d'abord, il faut préciser le titre de l'exposé en situant les capacités de Belle. En gros, on peut diviser les programmes d'ordinateur qui «jouent» en deux catégories. Les premiers tâchent d'être les plus intelligents possible en évaluant le plus finement qu'ils peuvent la situation actuelle du jeu ; cela les conduit à calculer des fonctions d'évaluation compliquées par des méthodes qui nécessitent des temps d'ordinateur très longs et en tout cas supérieurs aux temps impartis à un joueur lors d'un tournoi. Dans cette catégorie on peut classer les programmes écrits par Pitrat en France qui se sont révélés redoutables pour analyser des problèmes d'échecs. Notons cependant qu'une fonction d'évaluation capable de rivaliser avec les bons joueurs dans des jeux comme les échecs est inconnue à l'heure actuelle.

La deuxième catégorie de programmes comprend ceux qui tâchent d'examiner le plus grand nombre possible de coups en partant de la situation actuelle du jeu. A cause de l'incroyable nombre de cas différents à envisager, ne serait-ce que pour quatre coups à l'avance, l'idée essentielle consiste à aller le plus vite possible pour faire ces opérations, quitte à évaluer très sommairement les positions, c'est-à-dire comme le ferait un joueur moyen de classe «C». C'est pourquoi, on dit que ces programmes utilisent la «force brute». La mise en œuvre d'un tel projet nécessite de fabriquer des circuits spécialisés pour réaliser extrêmement rapidement certaines tâches nécessitées par le programme. L'influence de la vitesse apparaît clairement dans l'aventure arrivée en 1976 à CHESS 4.5, le programme de Northwestern University. Il jouait à cette époque dans tous les tournois de classe «B». son niveau se situait au milieu de cette classe et soudain au cours d'un tournoi, il se mit à surclasser tous ses adversaires, faisant un score de 5.0.

La raison en était simplement que le programme avait été transporté sur une machine 10 fois plus rapide, ce qui élevait ses performances d'un échelon dans le classement officiel des joueurs.

Belle, l'ensemble programme-machine plus particulièrement étudié ici, utilise la force brute. Elle fut créée par Ken Thompson et Joe Condon du Bell Laboratory à Murray Hill dans le New Jersey aux USA. Elle est capable d'examiner 30 millions de positions dans le temps imparti à un joueur pour jouer un mouvement dans un tournoi, soit à peu près 150 secondes. Elle fut sacrée championne du monde des ordinateurs à Linz en Autriche en septembre 1980 à l'issue d'un tournoi assez disputé qu'elle a cependant largement dominé (2). La communication de Hans Berliner qui est à la fois très bon joueur d'échecs et professeur d'intelligence artificielle à Carnegie Mellon University à Pittsburg en Pennsylvanie portait essentiellement sur une analyse des performances de Belle et de ses confrères et consœurs.

Certes, il est décevant de voir que la victoire d'un championnat du monde d'échecs, fut-il celui des ordinateurs, est revenue à un programme à première vue tout ce qu'il y a de plus stupide. Mais Berliner montra à l'aide d'exemples que les programmes d'échecs en général et Belle en particulier ont deux qualités que les spécialistes d'échecs appellent l'imagination et la compréhension. La première qualité peut être illustrée par une anecdote. Lors du deuxième championnat du monde à Toronto en 1977, KAISSA le programme soviétique champion en titre perdit une tour lors d'une partie l'opposant à DUCHESS. Les maîtres et grands maîtres présents, dont l'ancien champion Mikhail Botwinnik qui accompagnait la délégation soviétique, considérèrent cela comme une grossière faute et l'attribuèrent à une erreur de programmation. Après de longues et pénibles recherches dans les listes des programmes, les concepteurs de KAISSAI durent se rendre à l'évidence : leur programme avait joué ainsi pour éviter d'être mat en dix coups, reculant autant qu'il le pouvait l'échéance de sa défaite. Ce fait, que les deux programmes avaient entrevu, avait échappé aux spécialistes. En effet, un programme peut envisager tous les mouvements possibles jusqu'à une profondeur de dix coups dans une fin de partie, chose qu'aucun humain ne peut faire. Les maîtres auraient dû alors dire «le programme est de toute façon perdu» au lieu de dire «le programme a fait une erreur» ; les programmes ont malheureusement un petit défaut : ils ne savent pas abandonner et se battent avec acharnement jusqu'au bout. Pour tester sa compréhension, Belle a été soumise à 300 problèmes, considérés comme difficiles, tirés du livre «Win at chess» (3). Elle y a fait de très bonnes performances faisant seulement une moyenne de 19,5 faux-pas alors qu'un joueur du niveau maître en fait 30 en moyenne. De plus, elle s'est permis le luxe de trouver 9 erreurs dans les solutions proposées par l'auteur du livre dont seulement 2 étaient déjà connues. En résumé, Belle est imbattable en tactique et ne fait aucune de ces erreurs grossières qui ont perdu parfois même des champions du monde. Cependant elle est encore faible en stratégie. Ainsi, les participants au congrès ont pu assister à une partie au cours de laquelle Belle, bien que faisant bonne figure, s'est fait battre par un maître de Vancouver.

Mais plus stupéfiants encore sont les pronostics que Berliner a fait lors de sa communication orale.

— En 1983, un programme battra un grand maître international au cours d'un tournoi.
— en 1985, un programme atteindra le niveau de grand maître international.
— Avant 1990, un programme sera champion du monde d'échecs et empochera probablement le prix de 100.000 dollars spécialement créé par la Fondation Fredkin du Massachusetts pour le premier programme qui battra le champion du monde.

Le problème reste de savoir quelle méthode utilisera ce programme. On peut penser qu'il devra combiner «force brute» pour la vitesse et la profondeur d'examen des coups et «finesse» dans sa fonction d'évaluation. Signalons que les derniers championnats du jeu Othello où maintenant les humains sont hors course, ne réunissaient que des programmes travaillant en force brute, mais ils ont montré que les meilleurs ne sont pas ceux qui examinent le plus loin, mais ceux qui «évaluent» le mieux.

Une conclusion que l'on peut tirer de tout cela, c'est qu'indépendamment du défi ainsi lancé aux joueurs d'échecs, cette compétition entre l'ordinateur et l'homme, par le truchement d'un échiquier, fera progresser l'informatique et l'intelligence artificielle dans des directions difficiles à pronostiquer actuellement. Qui aurait pu dire il y a dix ans que la «force brute» surpasserait la «finesse» dans les parties d'échecs par ordinateur ?

Pierre Lescanne

références .

(1) Hans J. Berliner *An Examination Of Brute Force Intelligence*, Proc. Seventh International Joint Conference on Artificial Intelligence, Vancouver, B.C., Canada, 24-28 août 1981, pp. 581-587

(2) D. Levy, B. Mittman, N. Newborn : *3rd World Computer Chess Champiuonship*, Communications of the Association for Computing Machinery, 23, (1980), pp. 661-664.

(3) F. Reinfeld : *Win at Chess, Dover Books,* (1958).

LES P.B. du P.A.

DES ÉNONCÉS

M. Chavard vous adresse l'énoncé suivant, un peu ancien, mais remis au goût du jour par le renouveau géométrique.

PB 135 - Construire un pentagone plan ABCDE, connaissant les milieux IJKLM de ses côtés (I milieu de AB, etc.). Peut-on exécuter cette construction avec le compas seul ?

Nos lecteurs les plus fidèles savent que nous n'avons jamais partagé ici le mépris pour la géométrie élémentaire qui était de mise, il y a quelques années. La réforme des programmes d'enseignement nous permet de donner libre cours à notre intérêt pour cette discipline. Aussi, si vous avez des énoncés de ce genre, envoyez-les.

Mais ne négligeons pas les Nombres pour autant :

PB 136 - Soit N = 0,999..99 (cent chiffres «9»). Quels sont les deux cents premiers chiffres de sa racine carrée ?

Et enfin, une question envoyée par M.J.L. Gaudin.

PB 137 - Calculer le produit :
$P = \text{Sin } 1^\circ . \text{ Sin } 2^\circ . \text{ Sin } 3^\circ \ldots$
$\text{Sin } 88^\circ . \text{ Sin } 89^\circ . \text{ Sin } 90^\circ$

*

* *

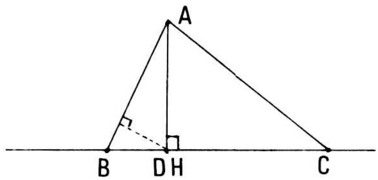
DES SOLUTIONS

PB 126, PA 71-72, p. 33 (problème de Sylvester)

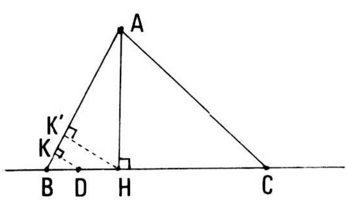
Soit E un ensemble fini de points du plan, vérifiant la propriété suivante : quels que soient les points M et N de E, il existe toujours un troisième point P appartenant à E, distinct de M et de N, et alignés avec eux. Montrer que les points de E sont tous alignés.

Le premier mouvement, à la lecture de cet énoncé est de chercher une démonstration pour récurrence sur le nombre de points. Mais on voit rapidement que cela n'aboutit pas. Voici une solution donnée par MM. Roux et Lehning : si les points de E ne sont pas tous alignés, considérons l'ensemble des triplets (A,B,C) de points de E non alignés. Ils sont alors en nombre fini, non nul. Il y en a un pour lequel la distance de A à la droite BC est *minimum*. Soit H le projeté orthogonal de A sur la droite BC et h = AH la distance (ou hauteur) minimum en question. La droite BC contient un troisième point de E, soit D.

Il se peut que l'un des trois points B,C,D, soit confondu avec H. Quitte à changer les dénominations de ces points, on peut toujours supposer que c'est D. Mais alors, la distance DK de D à la droite BC (figure 1) est strictement inférieure à h, d'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle AKB.



Si maintenant aucun des points B,C,D, n'est confondu avec H, deux de ces points sont du même côté de H. Supposons que ce soit B et D, D entre B et H (figure 2). D'après Thalès, on a : $DK < HK'$ et, par Pythagore, $HK' < AH = h$.



Dans les deux cas, on produit un triplet de points de E non alignés avec une hauteur strictement inférieure à h, ce qui est contraire à l'hypothèse. Et voici prouvé par l'absurde que nos points sont tous alignés.

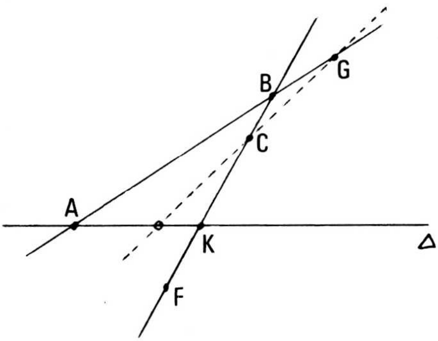
MM. Ferréol et Vidiani nous signalent que cet énoncé a été posé à l'oral du CAPES et du concours d'entrée à Polytechnique, et figure dans des recueils d'exercices corrigés de ces concours. Pourtant, nous n'avons utilisé aucune connaissance mathématique qui excède le programme de géométrie de Troisième, même si l'enchaînement des raisonnements était tout sauf évident.

Malgré son caractère élémentaire, cette propriété a été découverte à une date assez récente. Elle a été conjecturée en 1893 par Sylvester et démontrée en 1933 seulement par T. Gallai. La démonstration ci-dessus est due à Kelly. Elle a l'avantage de la simplicité, mais elle fait intervenir la structure euclidienne du plan, ce qui n'est pas vraiment indispensable. On évite cet inconvénient de la façon suivante.

Supposons encore les points de E non alignés, appelons $\mathscr{D}$ l'ensemble (fini) des droites joignant deux points de E et distinguons un point A de E, par lequel on fait passer une droite Δ qui n'est parallèle à aucune droite de $\mathscr{D}$. Chaque droite de $\mathscr{D}$ coupe donc Δ en A ou en un point qui n'est pas un point de E : Soient K_1, K_2,... K_m ces points, distincts, et distincts de A (il en existe, sans quoi les points de E seraient tous alignés). Ces points, et le point A, se succèdent dans un certain ordre sur la droite Δ . Il y en a un qui est le premier après A : nous l'appelons K.

Le segment ouvert]A,K[ne contient aucun point K_i, donc **ne rencontre aucune droite de** $\mathscr{D}$.

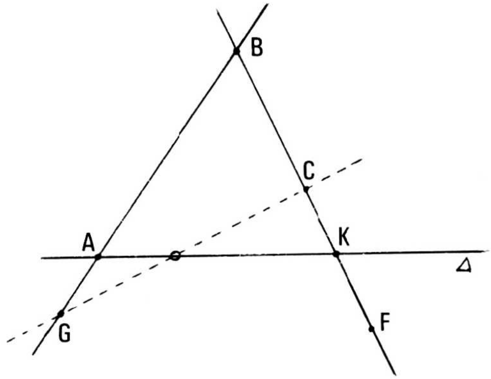
Le point K, par construction, est situé sur une droite de $\mathscr{D}$, laquelle contient au moins trois points de E : B, C et F. Ou bien ces trois points sont situés du même côté de K, ou bien il y en a deux d'un côté et un de l'autre. Plaçons-nous dans ce dernier cas (figure 3).



La droite AB contient un troisième point de E, soit G. Si G est extérieur au segment [A,B], la droite CG coupe le segment]A,K[(figures 3 et 4), ce qui est **impossible.**

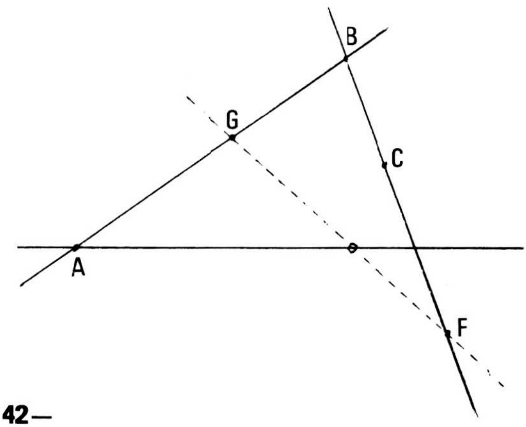
Si G est entre A et B, c'est la droite GF qui coupe le segment]A,K[: encore une impossibilité (figure 5).

Si vous supposez maintenant que B, C, F sont d'un même côté de K,



vous trouverez sans mal les constructions qui conduisent à la même impossibilité.

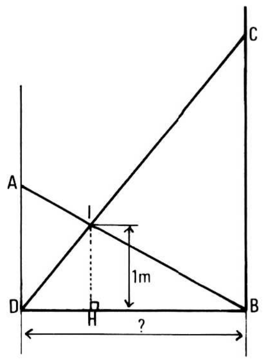
Il apparaît ainsi que la propriété de Sylvester découle du fait que le corps des réels est **ordonné**, et elle ne se généralise vraisemblablement pas aux géométries planes construites sur des corps non ordonnés : c'est clair pour les géométries finies, mais c'est sans doute aussi vrai dans le plan $\mathbb{C}^2$ construit sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Pouvez-vous donc trouver



dans ce plan un ensemble fini de points, non tous alignés, qui vérifient la propriété de l'énoncé ?

PB 129, PA 73-74, p. 39 (Deux Echelles)

La figure 6 représente, en vue de côté, deux échelles AB et CD, de longueurs 3m et 5m, appuyées sur deux murs opposés. Sachant qu'elles se croisent en I à 1 m du sol, calculer la distance BD des deux murs.



Raisonnons en général. Soit $AB = a$, $CD = b$, $IH = h$: trois réels positifs donnés, avec $a < b$. On pose $DA = u$, $BC = v$, et $BD = t$, la distance cherchée : ce sont les inconnues.

D'après la propriété de Thalès, on a :

$$\frac{BH}{BD} = \frac{HI}{DA} = \frac{h}{u}, \quad \frac{DH}{DB} = \frac{HI}{BC} = \frac{h}{v}$$

d'où :

$$\frac{h}{u} + \frac{h}{v} = \frac{BH + DH}{BD} = 1$$

Et d'après Pythagore : $t^2 + u^2 = a^2$, $t^2 + v^2 = b^2$. Nous obtenons ainsi les trois équations reliant nos trois inconnues.

Les solutions de nos lecteurs comportent la même mise en équations (à des nuances près) mais divergent quant à la méthode à suivre pour les résoudre. M. Lanchon, de Saint-Brieuc, utilise des rapports triganométriques, ce qui revient à éliminer u et v dans le système ci-dessus, et qui conduit à l'unique équation :

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-t^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2-t^2}} = \frac{1}{h}$$

Cette équation est ensuite résolue par itération à l'aide d'une HP97, mais une machine moins performante suffirait. Ainsi procède également M. Raymond.

MM. Ferréal, Esch et Thépault éliminent t et v, ce qui conduit à une équation du **quatrième degré** en u. Ainsi procède également M. Noirot, qui prend une autre inconnue, le rapport $\frac{DH}{DB}$.

On peut aussi concevoir une méthode qui préserve une certaine symétrie entre u et v. Après élimination de t, nous avons :

$$\frac{u+v}{uv} = \frac{1}{h}, \quad v^2 - u^2 = b^2 - a^2$$

Si nous posons v + u = s et v - u = d, nous avons : 4 uv $= s^2 - d^2$, et notre système devient :

$$\frac{4s}{s^2-d^2} = \frac{1}{h}$$

$sd = b^2 - a^2$. En éliminant s, il vient : $d^4 + 4h(b^2-a^2)d - (b^2-a^2)^2 = 0$. Encore une équation du quatrième degré, mais fort incomplète. En posant :

$$x = \frac{d}{\sqrt{b^2-a^2}}$$

(inconnue) et

$$m = \frac{h}{\sqrt{b^2-a^2}}$$

(paramètre), elle devient :

$x^4 + 4mx - 1 = 0$

Ces équations du quatrième degré peuvent se résoudre algébriquement, avec des formules comportant des radicaux : M. Thépault nous rappelle la méthode de Ferrari, mathématicien italien du 16e siècle. Mais il est plus commode d'utiliser des méthodes numériques, de Lagrange, de Newton, ou par itération, ou par dichotomie. Et c'est tout aussi rigoureux, puisque l'étude des fonctions polynômes en question permet de localiser leurs racines.

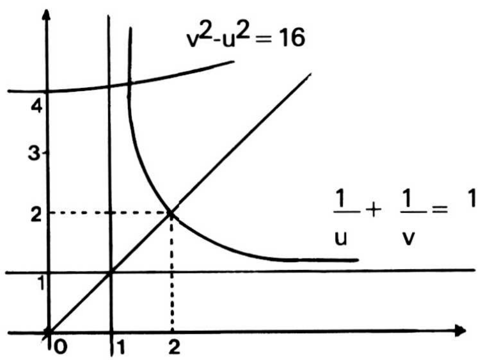
Par exemple, avec les valeurs numériques de l'énoncé, l'équation en **d** devient : $d^4 + 64\,d - 256 = 0$, soit $x^4 + x - 1 = 0$, où $x = d/4$. Il existe une seule racien positive, comprise entre 0 et 1. Par dichotomie, on trouve : $x \simeq 0{,}724\,491\,959$, d'où : $d \simeq 2{,}897\,967\,836$ et $s = 16/d \simeq 5{,}521110276$.

Puis : $v = 1/2\,(s+d) \simeq 4.209539056$ et $u = 1 + 2\,(s-d) \simeq 1{,}311571220$. Et enfin : $t = \sqrt{9-n^2} \simeq 2{,}698106917$, ou bien $t = \sqrt{25-v^2}$, qui donne le même résultat à 10^{-9} près.

M. Thépault résout le système en **u** et **v** par une méthode d'itération fort ingénieuse. Ce système s'écrit dans le cas présent :

$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 1$, $v^2 - u^2 = 16$. Ce qui correspond graphiquement, à l'intersection de deux hyperboles (figure 7) et qui s'écrit aussi : $v = \sqrt{u^2+16}$,

$$u = \frac{v}{v-1}$$



On prend une valeur initiale de u suggérée par le dessin, par exemple $u_o = 1$,

puis $v_o = \sqrt{u_o^2 + 16}$,

$$u_1 = \frac{v_o}{v_o - 1}$$

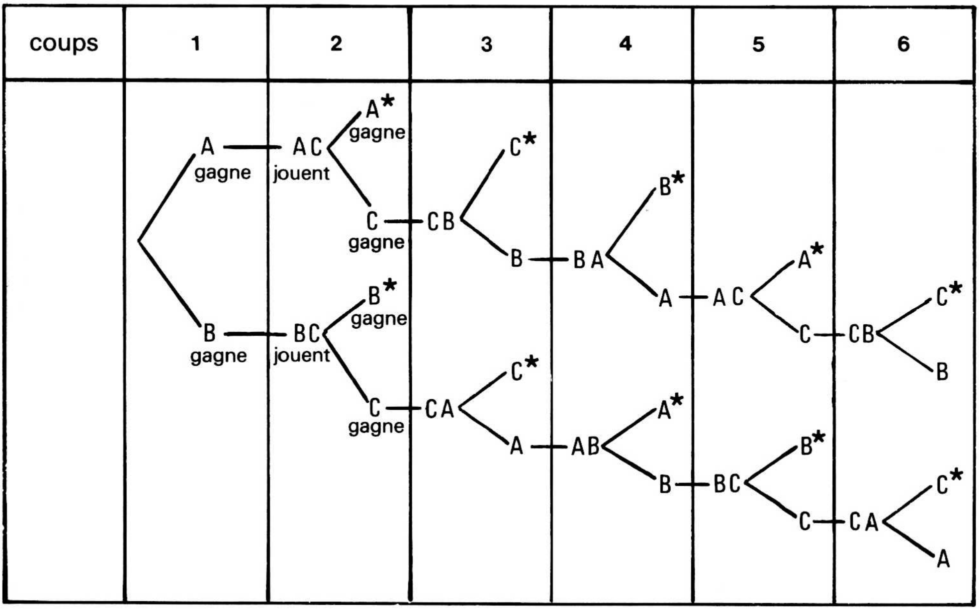
etc... Ce procédé donne très vite les valeurs de u et v trouvées ci-dessus, et il les donne même indépendamment de la valeur choisie pour u_o. Et pourquoi donc ?

Il resterait à traiter ce problème pour les autres valeurs de a, b, h et à discuter pour savoir dans quels cas il est possible. Il faut déjà que $1/a + 1/b < 1/h$. Mais est-ce suffisant ? Je vous le demande.

PB 130, PA 73-74, p. 39 (le jeu de la poule)

Trois personnages, nommés A, B et C, jouent à pile ou face. Tout d'abord, A joue avec B. Puis C joue avec la vainqueur du premier coup, et ainsi de suite : celui qui n'a pas participé à un coup rencontre le vainqueur de celui-ci au coup suivant. Est déclaré gagnant celui qui gagne deux coups consécutifs, et la partie s'arrête. Quelles sont les probabilités de gain de chacun des joueurs ?

Voici schématiquement ce qui peut se produire lors des six premiers coups:



L'étoile (*) signifie que le joueur a gagné deux coups consécutifs, donc a gagné la partie, et que cette partie s'arrête là. Chaque embranchement est pris avec la probabilité 1/2.

Soit x la probabilité que le joueur C gagne la partie. S'il gagne, il gagnera **avant** ou **après** le quatrième coup. La probabilité qu'il gagne **avant**, c'est-à-dire du troisième coup, est :
$2 \times 1/2 \times 1/2 \times 1/2 = 1/4$

La probabilité que la partie se déroule après le quatrième coup, autrement dit la probabilité pour que le cinquième coup ait lieu, est :
$2 \times (1/2)^4 = 1/8$

Si ce cinquième coup est joué, la situation est alors la même qu'au second coup. La probabilité de gain du joueur C est donc encore égale à : **x** . La probabilité que ce joueur gagne après le quatrième coup vaut donc : 1/8 x. Ainsi, la probabilité totale de gain de C est : 1/4 + 1/8 x. D'où l'égalité :
x = 1+4 + 1/8 x, qui nous conduit au résultat : x = 2/7.

On pourrait déterminer de même la probabilité de gain de A et de B. Mais il est plus simple encore de constater qu'ils sont interchangeables et que, par raison de symétrie, leurs chances sont les mêmes. Ces probabilités valent donc chacune $1/2\,(1 - 2/7) = 5/14$. Telle est la solution de M. Puissegur, de Nevers.

C'est de la France du bout du monde que nous vient la solution suivante. M. Besnard, professeur à Nouméa (Nouvelle Calédonie), observe d'abord que je joueur C ne peut gagner qu'au bout d'un nombre de coups multiple de trois : soit n = 3 k. La probabilité que C gagne en 3 coups est : $2\,(1/2)^3$. La probabilité qu'il gagne en n = 3k coups est de même, d'après l'arbre ci-dessus : $2\,(1/2)^{3K}$. La probabilité qu'il gagne apparaît alors comme la somme d'une série géométrique :

$$2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3k} = 2\ \frac{1/8}{1-1/8} = 2/7$$

J'ai reçu deux réponses erronées de lecteurs qui concluent à l'égalité des chances pour les trois joueurs, alors que l'analyse du problème confirme ce qui semble évident de prime abord : que le joueur C est désavantagé parce qu'il ne participe pas à la première partie.

A présent, il vous est loisible de reprendre cet énoncé en supposant que les chances de A, B, C ne sont plus forcément les mêmes suivant que A rencontre B ou C. Peut-on ainsi compenser l'inégalité dont C est victime ?

PB 132, PA 75-76, p. 44 (millésimes remarquables)

On remarque que : $1981 = 13^3 - 6^3$. Quelle est la prochaine année dont le millésime est somme ou différence de deux cubes ?

Voici une solution s'inspirant des indications de M. Vidiani et de l'auteur de l'énoncé M. Kuntzmann. Cherchons d'abord la prochaine année dont le millésime soit **somme** de deux cubes entiers positifs : $x^3 + y^3$, avec $x \geqslant y \geqslant 0$. Il est clair que l'an 2000 convient : $2000 = 10^3 + 10^3$. mais existerait-il une autre année répondant à la question entre 1981 et 2000 : $1981 < x^3 + y^3 < 2000$? On a $x^3 \leqslant x^3 + y^3 \leqslant 2x^3$, d'où : $1981/2 < x^3 < 2000$ et par suite : $10 \leqslant x \leqslant 12$. La solution $x = 10$ ne convient pas car $y = 10$ donne $x^3 + y^3 = 2000$, trop grand ; et $y = 9$ donne $x^3 + y^3 = 1729$, trop petit. On écarte de même $x = 11$ et $x = 12$.

Cherchons maintenant le premier millésime de la forme $x^3 - y^3$, et plus précisément voyons s'il existe x et y tels que : $1981 < x^3 - y^3 < 2000$. Notons d'abord que $x^3 \geqslant 1981$, d'où $x \geqslant 13$. Si l'on avait $y \leqslant 5$, ceci impliquerait : $x^3 - y^3 \geqslant 13^3 - 5^3 = 2072$, ce qui n'est pas.

D'où : $y \geqslant 6$. On pose alors : $x - y = d$, et l'on calcule :

$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2) =$
$d((y+d)^2 + y(y+d) + y^2) =$
$d(d^2 + 3yd + 3y^2) \geqslant d(d^2 + 18d + 108) = f(d)$

Cette fonction f est strictement croissante pour les valeurs positives de la variable. Comme $f(8) = 2528$, les seules valeurs de de susceptibles de convenir sont 1,2,3,4,5,6,7. On étudie successivement ces sept cas. Si $d = 1$, alors : $x^3 - y^3 = 3y^2 + 3y + 1$. Cette expression ne dépasse 1981 que pour $y \geqslant 26$. Et alors, on a $3y^2 + 3y + 1 \geqslant 2107$. Et il en va de même pour $d = 2, 3$.. jusqu'à 7. Donc la prochaine année répondant à la question est bien l'an 2000.

M. Excoffier nous fait aussi part de tâtonnements qui ont donné : $27^3 - 26^3 = 2107$ et $14^3 - 9^3 = 2015$.

*

* *

Un mot pour finir, et toujours dans le même sens. Ne croyez pas que le rôle du lecteur est de re-trouver la Solution, déjà présente dans les papiers du responsable des «PB du PA».

Bien des écrits de lecteurs contiennent au contraire des apports originaux et inattendus, et constituent des composants indispensables de cette rubrique. Solutions, commentaires, prolongements des problèmes publiés, voici ce dont nous avons besoin. Et aussi, et surtout, **nouveaux énoncés**, pour varier les sources. Et enfin, critiques et suggestions. Mais **attention** tout ceci à ma **nouvelle adresse :**

M. CUCULIERE Roger
Professeur de Mathématiques
Lycée Carnot
145, Bd. Malesherbes
75017 PARIS

LE PETIT ARCHIMÈDE
Revue de l'Association pour le Développement de la Culture Scientifique
10 numéros par an

ABONNEMENT 1981 (nouveau tarif)

Abonnement de Soutien : 100F ☐ (1)
Abonnement de Bienfaiteur : 500F ☐ (1)
Abonnement ordinaire : 50 F ☐ (1)
Abonnements groupés (minimum 10) : 35 F
(Ils peuvent être servis à une ou plusieurs adresses) ☐ (2)

MAJORATION POUR TOUT ENVOI HORS EUROPE
ou PAR AVION (le préciser) de 50 %

Toutes les collections anciennes sont disponibles :
N° 1 à 10, 11 à 20, 21 à 30, 31 à 40, 41 à 50, 51 à 60 : 35F
Prix de vente au n° : 8F la collection 61 à 70 : 40 F

PRODUCTIONS SPECIALES

Le nouveau calendrier perpétuel : 50 F le paquet de cinquante ☐ (3)

Affiches (5 affiches : 15 F) (10 affiches : 25 F) ☐ (2)

N° Spécial PA Sp1 (index général PA1 à PA50) : 5 F ☐ (1)

N° Spécial Pi : 75 F - A partir de 4 exemplaires : 70 F l'unité
A partir de 10 exemplaires : 60 F l'unité ☐ (2)

NOM : Prénom :
Adresse d'expédition :
Code Postal : Ville :
Bureau distributeur :
Cette demande est à adresser exclusivement à :

ADCS - Abonnement - 61 rue St Fuscien 80000 AMIENS

Joindre chèque ou mandat à l'ordre de :

ADCS CCP 4736 63 W LILLE

(1) cocher les cases utiles
(2) Nombre d'exemplaires
(3) Nombre de paquets de cinquante cartes postales

LES ETABLISSEMENTS SCOLAIRES PEUVENT-ILS ÉVITER LES DEMANDES DE FACTURE ? MERCI

Adresser toute correspondance à :
Y. ROUSSEL - 61 rue St Fuscien 80000 AMIENS
Revue éditée par l'A.D.C.S. - Le Directeur de la publication J.C. HERZ
IMPRIMERIE I & RG AMIENS Tél. 92.60.16

© Dépôt légal octobre novembre 1981 **N° 77-78 : 10 F**