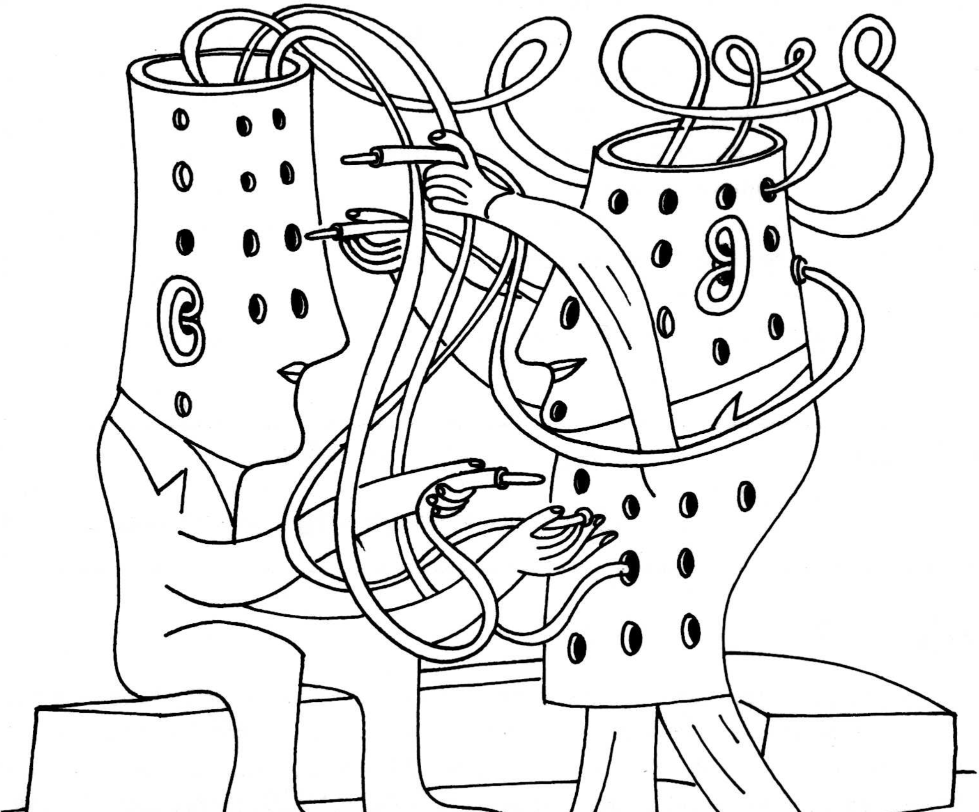
le petit archimède

10 numéros par an



[redacted]

P.A. No 90

Décembre 1982

SOMMAIRE

NOS CONVENTIONS pour les "petits" facile

difficulté moyenne pour les grands

90 + 10 = ...

C'est avec un gros retard que ce numéro 90 arrive à nos lecteurs. Mais une fois n'est pas coutume et nous espérons que vous saurez excuser cet inhabituel retard du à des imprévus nombreux. Ce petit numéro (24 pages) ne vous présente pas par ailleurs toutes nos rubriques habituelles (Jeux, ARL, ILF...) ! Mais rassurez-vous, le prochain PA comblera ces manques !

10. Oui, il reste dix numéros pour atteindre notre numéro 100. ET NOUS RENOUVELONS CETTE QUESTION PRESSANTE : P.A. DOIT-IL SURVIVRE ? SI OUI, ALORS RAPPELEZ-VOUS BIEN QUE NOUS DEVONS AU MOINS DOUBLER NOTRE NOMBRE D'ABONNES... ET CECI EST L'AFFAIRE DE CHACUN D'ENTRE NOUS !

P.A.

C'EST DU BILLARD !

Les billards des salles de jeux ont entre eux bien des différences, mais ils sont tous rectangulaires.

En leur donnant d'autres formes, on obtient parfois des résultats curieux.

Billard élliptique (fig. 1) :

Plaçons une boule en un des foyers de l'ellipse, puis poussons-la dans une direction quelconque. Comment rebondit-elle ?

Ceci fait, imaginons que la boule rebondit un nombre de fois aussi grand qu'on le veut. Que devient sa trajectoire lorsque la position initiale de la boule est un des foyers de l'ellipse ?

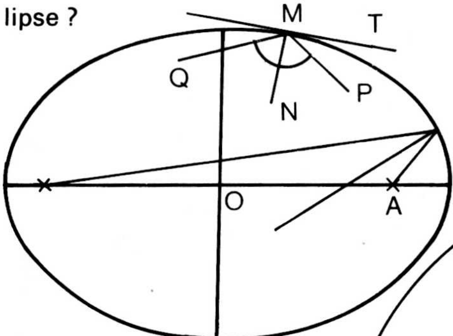


fig. 1

Billard circulaire (fig. 2)

Un Arabe de la fin du 10eme siècle se posa un des premiers le problème de la réflexion sur un miroir circulaire ou sphérique. C'est Abu Ali al Hassan (980-1038) plus connu sous le nom d'Alhazen.

Nous proposons à nos lecteurs un problème que les plus jeunes pourront résoudre empiriquement.

Nous nous servirons d'un repère orthonormé pour le repérage ($\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$).

Le billard a pour centre O et pour rayon 4.

On pousse la boule A ($x = 3$; $y = 0$) qui, après avoir touché le bord, rebondit en suivant la loi de la réflexion sur la tangente au cercle et va toucher la boule B, elle aussi réduite à un point ($x = -2$; $y = 1$).

En quels points la boule A doit-elle heurter le bord pour venir toucher B ?

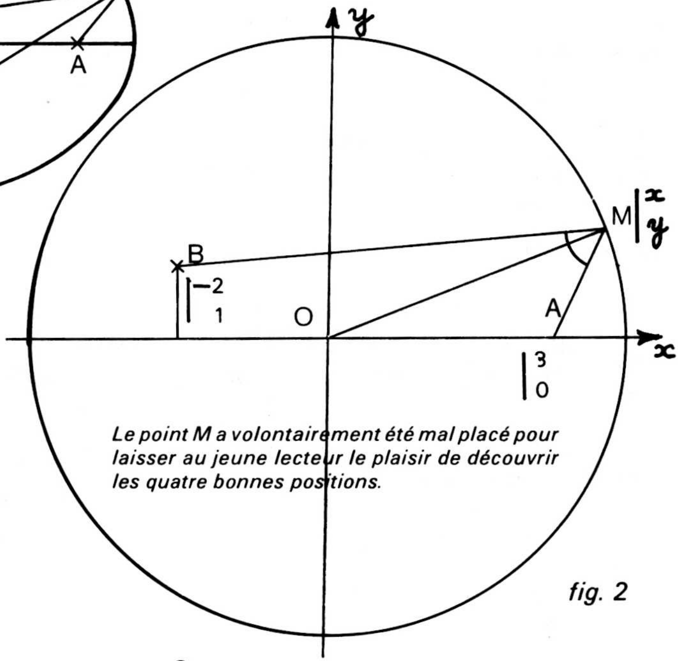
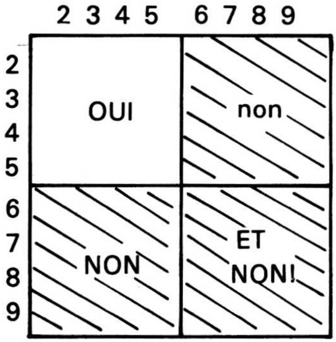


fig. 2

ENCORE UN SCANDALE



Dans l'écriture décimale des nombres entiers les chiffres 6, 7, 8, 9 ne sont pas indispensables !

Pour les supprimer on convertit en soustractions les additions indésirables, ce qui se traduit par la présence d'un signe «moins» sur les chiffres concernés. 6 s'écrit $1\bar{4}$; 49 devient $5\bar{1}$ (cinq dizaines et une unité négative).

De même $381 = 4\bar{2}1$; $377 = 4\bar{2}\bar{3}$ ou $4\overline{23}$ (400 - 23)

Cette écriture s'adapte bien aux calculs : les chiffres surmontés du signe «moins» correspondant à des nombres négatifs.

Aucune difficulté pour les additions :

$$
\begin{array}{lcr}
1603 \text{codage} & \longrightarrow & 2\bar{4}03 \\
2585 & \longrightarrow & 3\bar{4}\bar{2}5 \\
+ \quad 574 & \longrightarrow & 1\bar{4}\bar{3}4 \\
\hline
4762 \text{décodage} & \longleftarrow & 5\bar{2}\bar{4}2
\end{array}
$$

vous constatez que les retenues peuvent être négatives.

Quant aux soustractions, elles deviennent d'une facilité écœurante. Plus de retenues ! Jugez-en plutôt.

$$
\begin{array}{r}
1315 \\
-\ 744 \\
\hline
1\bar{4}\bar{3}1 = 571
\end{array}
$$

Pour la multiplication, il suffit de connaître «sa» table jusqu'à 5 x 5 un point c'est tout. Un scandale ! Comme si Pythagore n'aurait pas pu se rendre compte de ça... On aurait passé quatre fois moins de temps à l'apprendre.

$$
\begin{array}{rcr}
\left.\begin{array}{r} 4684 \\ \times 3691 \end{array}\right\} & \text{codage} \rightarrow & \begin{array}{r} 5\bar{3}\bar{2}4 \\ \times 4\bar{3}\bar{1}1 \end{array} \\
\hline
\begin{array}{r} 4684 \\ 42156 \\ 28104 \\ 14052 \\ \hline 17288644 \end{array} & & \begin{array}{r} 5\bar{3}\bar{2}4 \\ \bar{5}32\bar{4} \\ \bar{1}\bar{5}95\bar{2} \\ 19\bar{2}\bar{7}6 \\ \hline 18\bar{7}\bar{2}9\bar{3}\bar{6}4 \end{array} \\
\text{décodage} & \longleftarrow &
\end{array}
$$

Remarques :

1 - les produits partiels ne se correspondent en général pas.

2 - On voit apparaître des indésirables $\bar{5}, \bar{7}$. Notre écriture n'est donc pas parfaitement codifiée. A vous de le faire !

Signalons un procédé voisin (pratiqué jadis par les paysans roumains) permettant de multiplier des nombres compris entre 6 et 10 si l'on connaît sa table jusqu'à 5 x 5.

Donnons en exemple le calcul de 7x8.

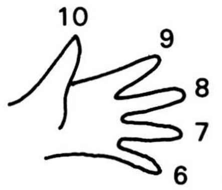
On constitue une sorte de pont en plaçant l'auriculaire en face du majeur.

Il y aura autant de dizaines que de doigts sur le pont et en dessous de celui-ci. Quant au nombre des unités, ce sera le produit des nombres de doigts «restants» dans chaque main.

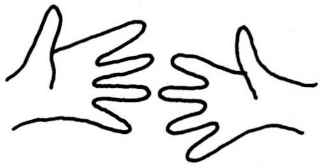
Justification algébrique très simple :

$(5 + n).(5 + p) = (n + p).\ 10 + (5 - n).(5 - p)$

(Dans l'exemple ci-dessus : $n = 2$ et $p = 3$).



A chaque doigt correspond un nombre



7 X 8 = 5 dizaines + 3 x 2

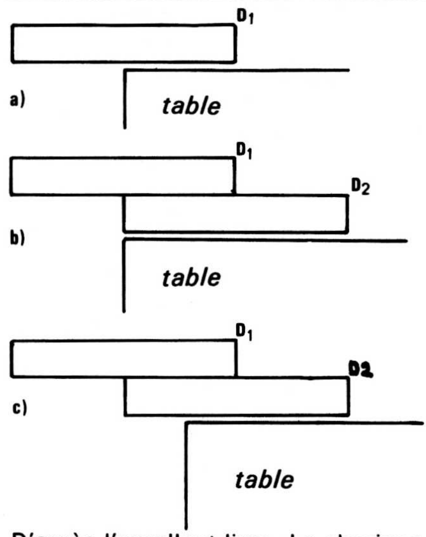
LA PILE DE DOMINOS

On pose un domino D_1 sur le bord d'une table à la limite du basculement (dessin a)

On introduit un domino D_2 sous D_1 (dessin b) D_2 joue le rôle de la table. On pousse l'ensemble sur le bord de la table à la limite du basculement (dessin c).

On introduit un domino D_3 sous D_2... etc

Jusqu'à quel rang peut-on continuer la manœuvre pour que l'ensemble des dominos reste en équilibre (précaire) ?



D'après l'excellent livre «La physique en questions» de J.M. Levy-Leblond

LES RAYONS et les OMBRES
un cadran solaire à la Réunion

L'ombre d'un piquet varie avec l'heure,d'où l'idée d'associer l'heure à l'ombre. Idée naturelle, assez simple... quand on la simplifie.

figure 1 - Représentons la Terre avec la Réunion R. La latitude $\widehat{E\,I\,R}$ est φ. Ici, φ est peu différent de 21°. La Réunion est dans la zone tropicale, pas très loin du tropique du Capricorne (hémisphère austral).

RH représente le plan horizontal d'un point de l'île.

RP est le stylet du cadran solaire parallèle à l'axe de la Terre.
Il est dans le plan méridien du lieu et $\widehat{H\,R\,P} = \varphi$.

figure 2 - Vue perspective agrandie de la région R.

figure 3 - La même mais, pour notre commodité, le petit bonhomme nous apparaît debout normalement.

figure 4 - la voûte céleste à la Réunion avec les trajectoires du Soleil à différentes dates de l'année (la Terre étant considérée comme fixe).

Première simplification, plaçons-nous un jour d'équinoxe. L'orbite apparente du soleil est dans le plan de l'équateur céleste Q ; le soleil est visible 12 h (équi-noxe) ; de E en O, il se déplace d'un mouvement uniforme (deuxième simplification).

figure 5 - Imaginons un demi-cylindre d'axe R P de section droite E'MO'. L'ombre de la pointe P du stylet se déplace à vitesse constante sur ce demi-cercle E'O', donc dans le plan Q.

S'il était construit, ce demi-cylindre (un peu arrangé) ferait un excellent cadran solaire. En réalité, l'ombre de P est sur le sol.

figure 6 - Pour faire des constructions en vraie grandeur, rabattons le demi-cercle E'O' sur le plan horizontal autour de l'intersection avec ce plan du plan Q en un demi-cercle $E_1\,O_1$ de centre A.

Faisons l'épure au moyen de deux plans de projection : l'un est le plan «frontal» R P M, l'autre le plan horizontal (figure 7).

Marquons sur l'arc $E_1\,O_1$ de 180° parcouru en douze heures les points N qui correspondent à des arcs E_1 N multiples de 15° parcourus en une heure.

Ce sont les rabattements aux heures entières 7h, 8h, 9h des ombres de P sur le demi-cylindre. La projection horizontale de l'ombre sur le sol du point (9h) par exemple est l'intersection avec la tangente en M aux demi-cercles de la droite A (9h).

Et si on n'est pas un jour d'équinoxe ? Le soleil n'est plus sur le demi-cercle E O, mais sur des arcs compris entre les trajectoires au 21 juin et au

21 décembre (dates des solstices). Ceci se traduit dans la gouttière demi-cylindrique par des cercles de section droite plus ou moins complets.

L'ensemble des rayons Soleil-Stylet est alors sur un cône de révolution (aplati) et les lignes d'ombre quotidiennes sont des branches d'hyperboles très ouvertes.

On pourrait penser que, quel que soit le décalage entre le Soleil et l'équateur céleste (sa déclinaison) les ombres à midi juste sont sur le méridien : ce n'est pas tout à fait vrai.

Les tracés ont été réalisés pour l'hémisphère austral. La figure 7 a servi à des classes de 3ème de La Rivière St Louis. Chaque groupe de 2 élèves a préparé un cadran solaire en classe de Travaux Manuels en accord avec le Professeur de Mathématiques.

Pour l'hémisphère nord, il suffit de retourner la feuille, de la regarder par transparence, en inversant nord et sud, et en tenant compte de la latitude pour la direction du stylet.

d'après François ABBO

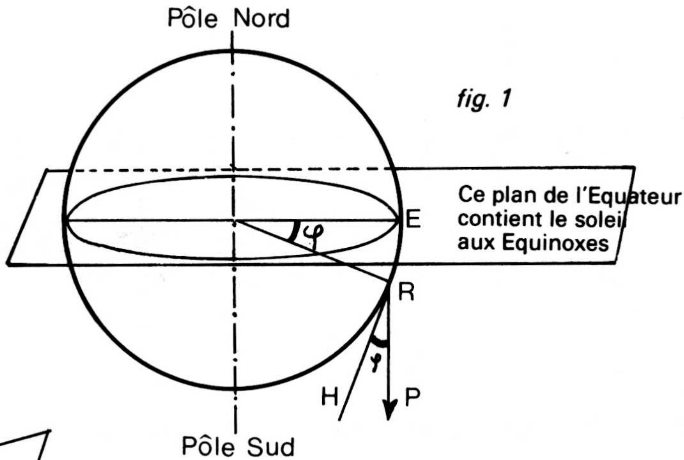


fig. 1

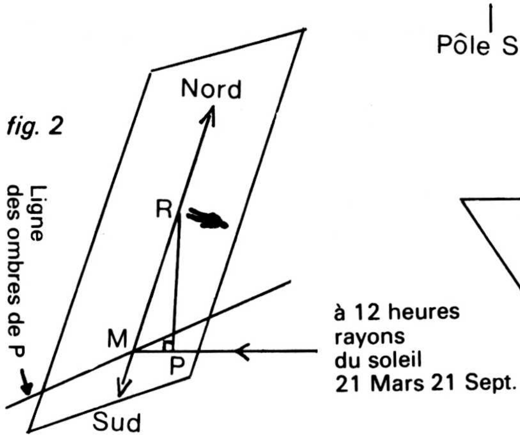


fig. 2

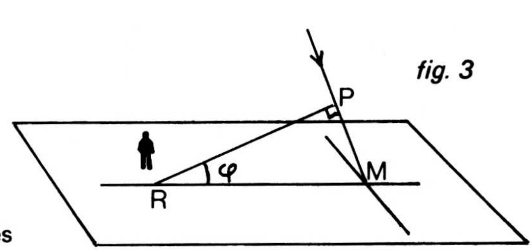


fig. 3

fig. 4

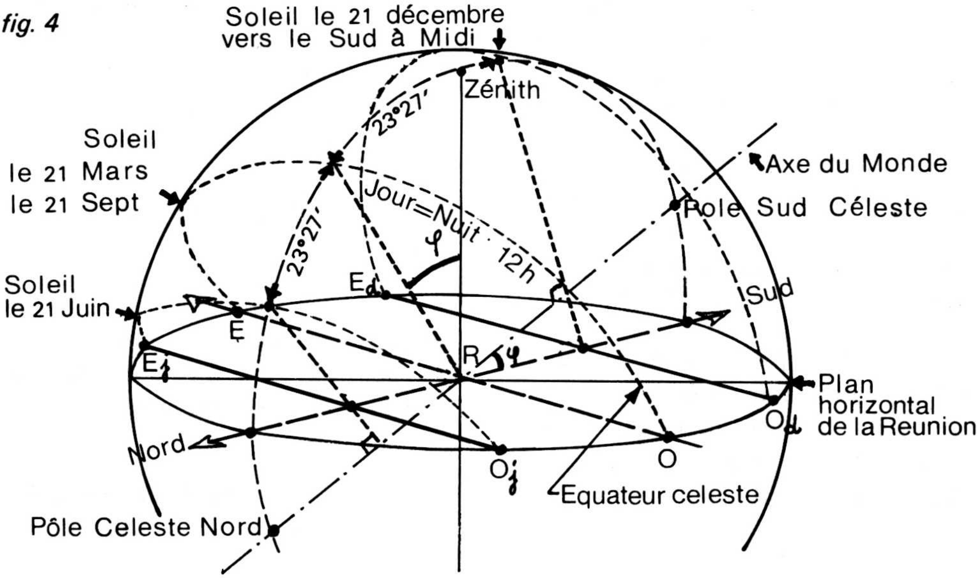
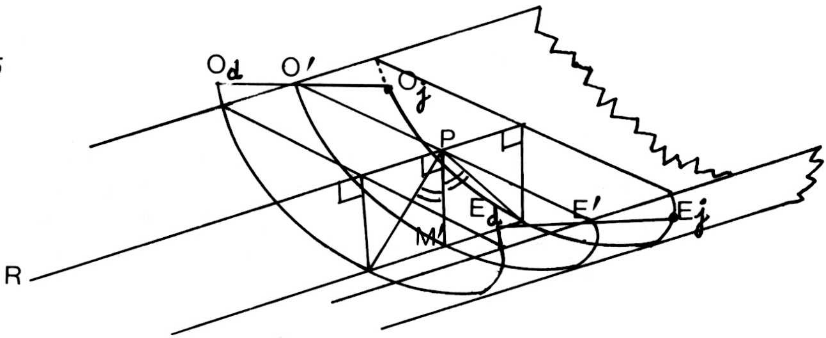


fig. 5



1 - arcs d'ellipse : O_d O′ O_j, E_d E′ E_j intersections du cylindre avec le plan horizontal de P

2 - les angles notés ⊿ ont été augmentés pour la lisibilité du dessin ; ils valent 23°27′

fig. 6

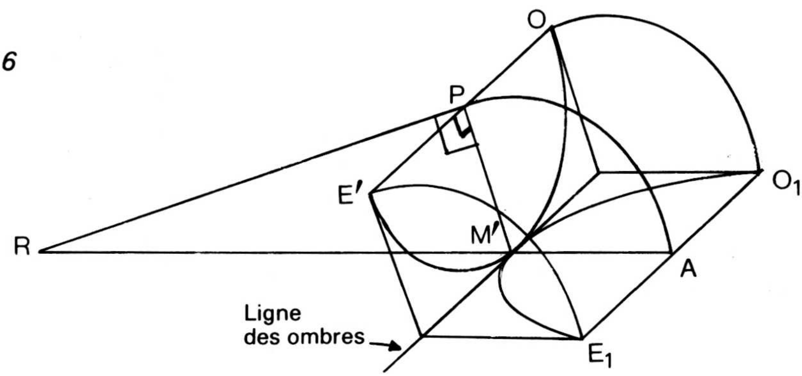
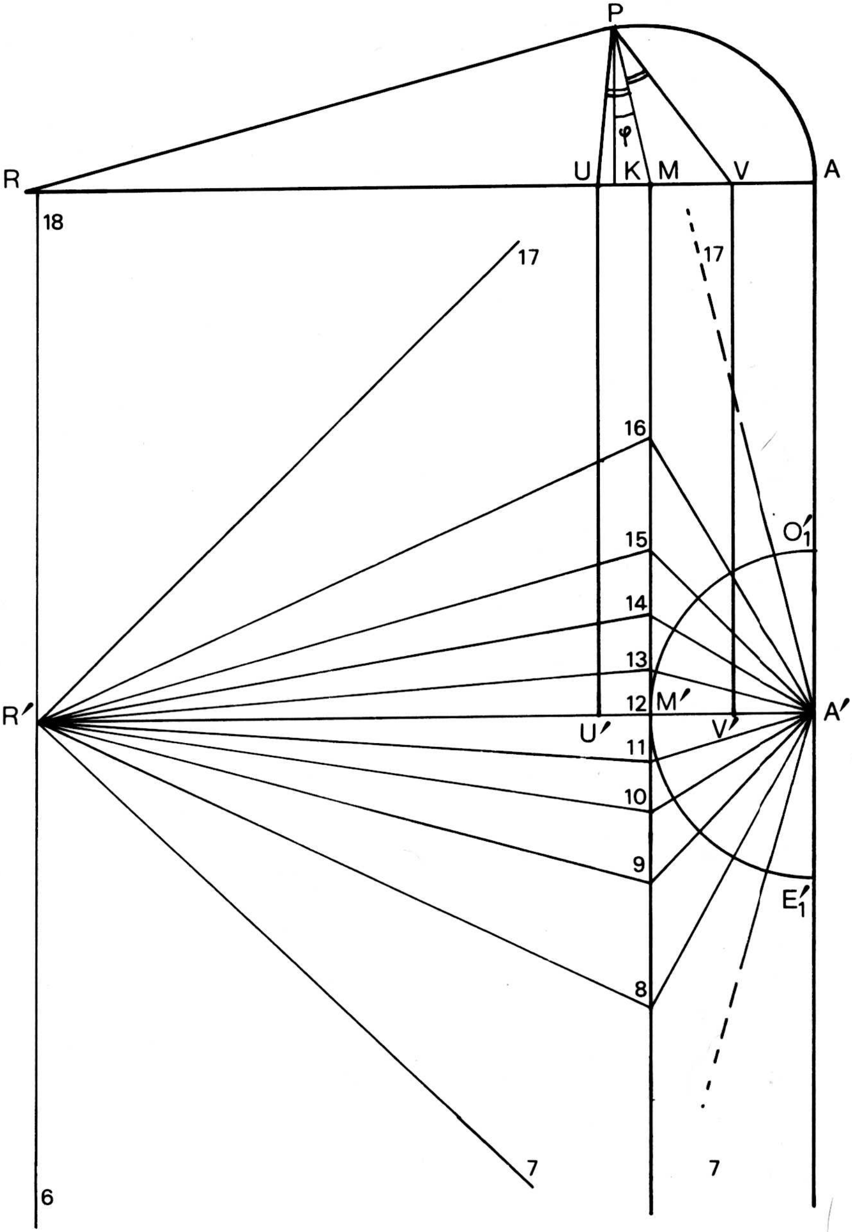


fig. 7



U′ ombre à midi le 21 décembre
V′ ombre à midi le 21 Juin

l'épure proposée aux élèves était à l'Echelle 2

CONSTRUCTION DES CARRES MAGIQUES (suite 1)

(Suite de PA 84-85 pp. 18 à 21)

Tous ceux qui se sont occupés de construire des carrés magiques ont cherché une méthode unique applicable à tous les ordres. Jusqu'ici, ils ont tous échoué. On distinguera donc ici comme tout le monde...

1 - L'ordre est un multiple de 4

1 - Carré d'ordre 4

1	**2**	**3**	**4**
5	**6**	**7**	**8**
9	**10**	**11**	**12**
13	**14**	**15**	**16**

A

On procéde en trois étapes

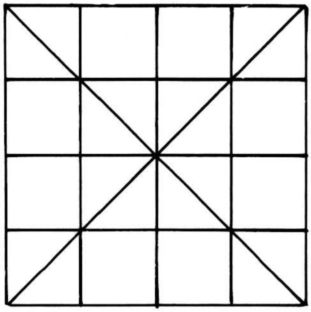
A - On écrit les nombres au crayon en série normale (dessin A)

B - On trace les diagonales du carré au crayon (dessin B)

C - On écrit à l'encre les nombres rayés par les diagonales. On remplace les nombres non rayés par leur complément à 17 (ou par leur symétrique par rapport au centre du carré).

Remarques :

D'autres méthodes conduisent à des résultats différents. Il y a 880 carrés différents d'ordre 4 sans compter ceux qu'on obtient à partir de ceux-là par des rotations ou des symétries.



B

1	**15**	**14**	**4**
12	**6**	**7**	**9**
8	**10**	**11**	**5**
13	**3**	**2**	**16**

C

2 - Carrés d'ordre 8, 12,... 4 p

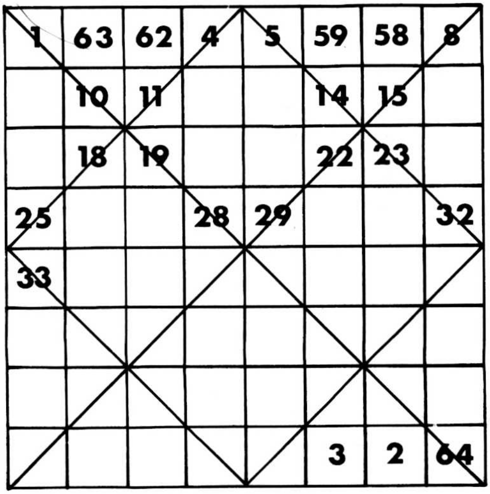
On écrit les nombres dans la grille en série normale

On fragmente la grille en carrés de côté 4.

On trace les diagonales de tous ces petits carrés

On écrit à l'encre les nombres rayés

On substitue aux autres le nombre de la case symétrique par rapport au centre.



Carré d'Ordre 8 qu'on pourra compléter

NE

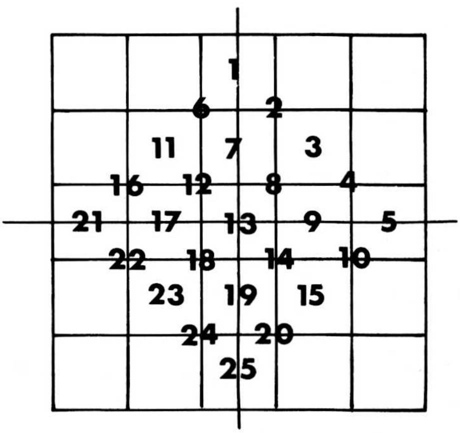
		1		
	11	7	3	
		13	9	5
2				6
8	4		16	12

Stade définitif (partiel)

2 - L'Ordre est un nombre impair

On décrira ici trois méthodes de type artisanal

1 - Méthode du noyau des impairs (expliquée pour un carré d'ordre 5)



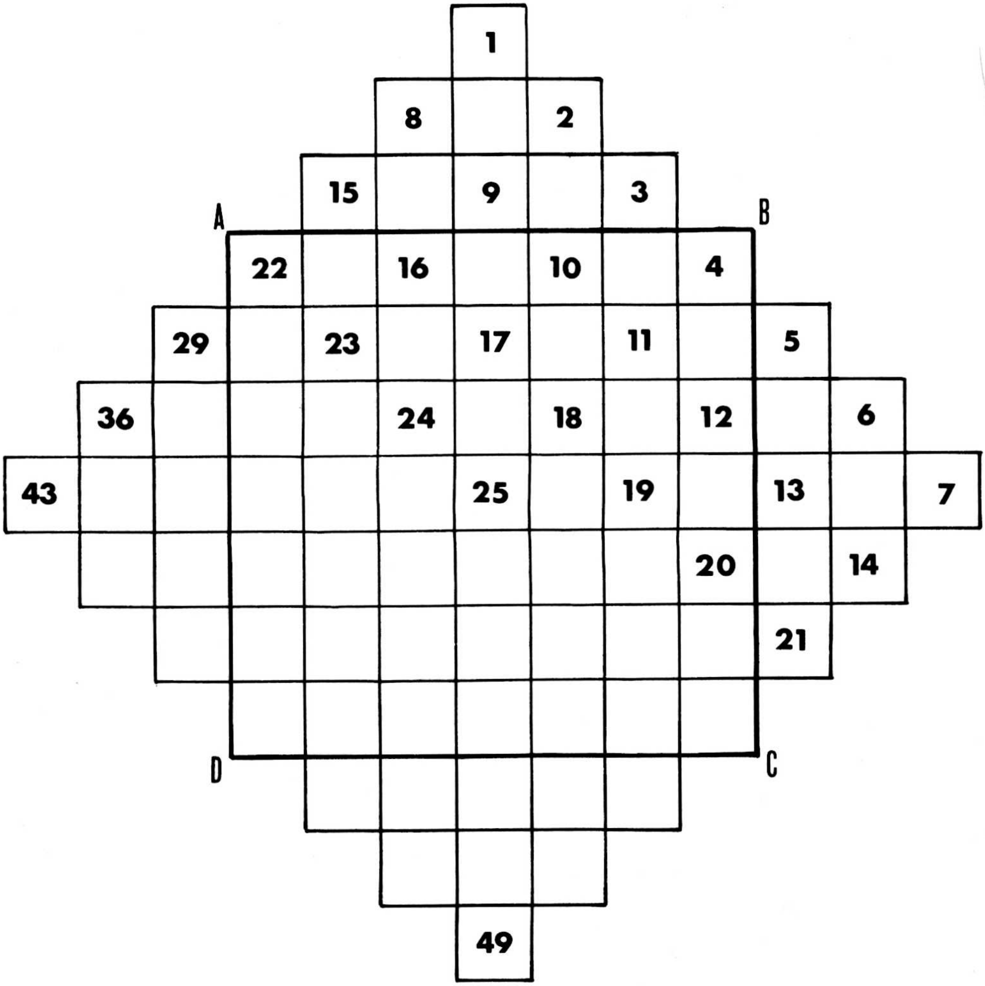
Phase préliminaire

On prépare la grille et on en trace les médianes au crayon.
On écrit au crayon dans l'ordre normal, les nombres impairs dans les cases, les nombres pairs sur les coins des cases.
On fait glisser en bloc les nombres pairs du quart N.E. 2, 4, 8, vers les cases restées libres du quart SW (par translation).
On fait glisser en bloc les nombres pairs 6, 12, 16 du quart NW vers les cases restées libres du quart S. E.; de même pour les autres quarts.
On peut alors écrire à l'encre les nombres pairs dans leur case définitive et les nombres impairs aussi. Ceux-ci se trouvent entourés : noyau des impairs.

2 - Méthode du damier
expliquée pour un carré d'ordre 7

On trace le carré de 7 x 7 cases. Sur chacun des côtés on construit une marche d'escalier de (5 + 3 + 1) cases. On obtient un «petit beurre» carré.

(translation) le côté AB sur le côté DC entraînant ainsi les cases écrites de l'escalier dans les cases libres du carré;
15, 9 et 3 sont donc venus contre le côté DC. De même, l'escalier extérieur «de l'Est» collé à BC vient contre AD mais à l'intérieur du carré.



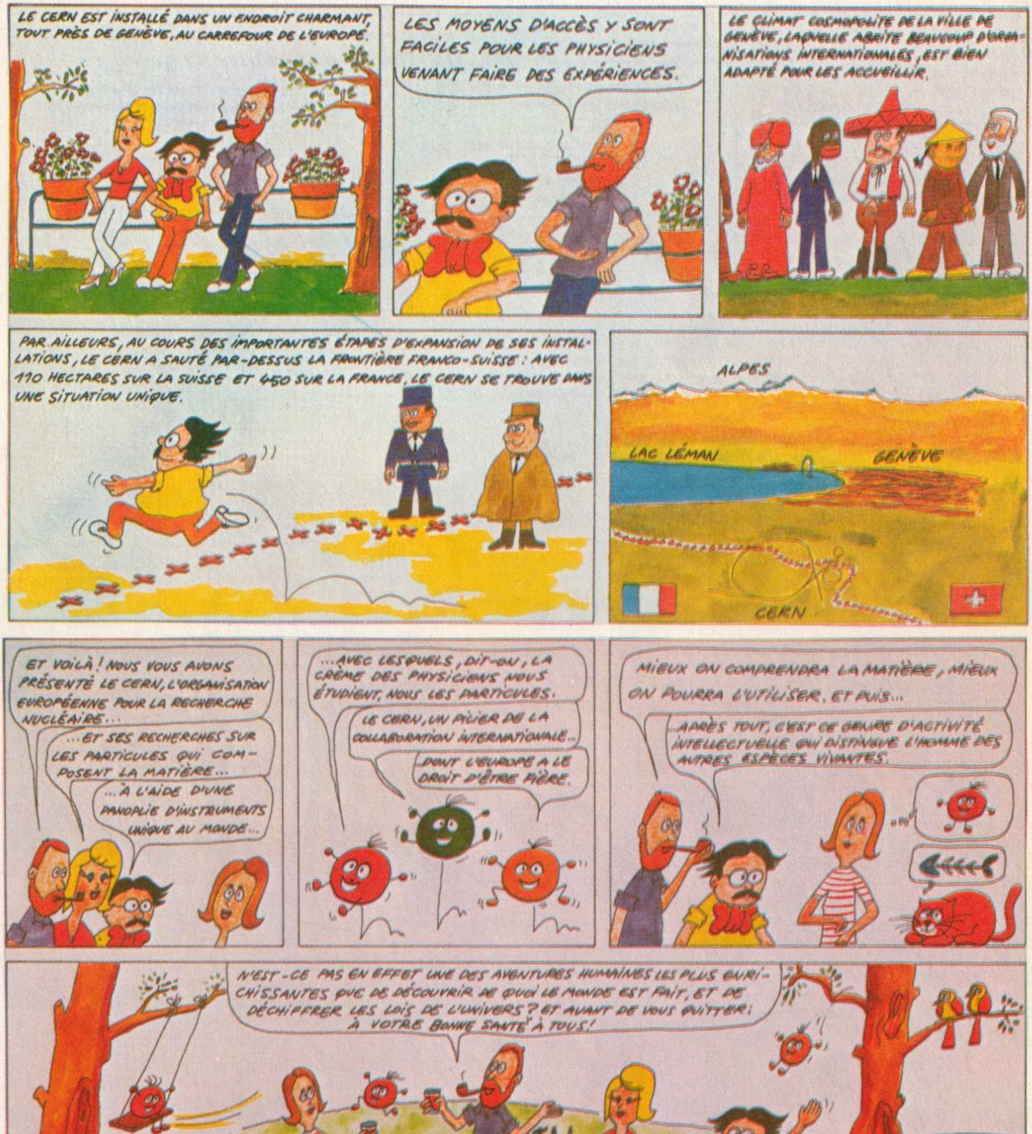
On écrit au crayon les nombres de 1 à 49 par séries de 7 comme il est indiqué.
On fait descendre par glissement

De même... 49 vient entre 24 et 18, 43 entre 25 et 19.
On peut écrire définitivement les nombres à l'intérieur du carré ABCD

LA CHASSE AUX PARTICULES (suite BD 8 et fin)

LE CONSEIL DU CERN EST AIDÉ DANS SES DÉLIBÉRATIONS PAR DEUX COMITÉS.
LE COMITÉ DES DIRECTIVES SCIENTIFIQUES EST CHARGÉ DES QUESTIONS INTÉRESSANT LA RECHERCHE.
IL EST COMPOSÉ DE SCIENTIFIQUES ÉMINENTS DESIGNÉS SANS TENIR COMPTE DE LEUR PAYS D'ORIGINE.
LE COMITÉ DES FINANCES S'OCCUPE DES QUESTIONS BUDGÉTAIRES.
IL EST COMPOSÉ D'UN DÉLÉGUÉ DE CHAQUE ÉTAT MEMBRE.
LA DIRECTION DU CERN EST ASSURÉE PAR DEUX PATRONS: UN DIRECTEUR GÉNÉRAL EXÉCUTIF ET UN DIRECTEUR GÉNÉRAL POUR LA RECHERCHE
CERN
CHAQUE ÉTAT MEMBRE VERSE AU CERN UNE CONTRIBUTION CALCULÉE AU PRORATA DE SON REVENU NATIONAL NET.
CERN
LE BUDGET ANNUEL, PROCHE DE 600 MILLIONS DE FRANCS SUISSES EN 1978, EST RÉPARTI ENTRE LES ÉQUIPEMENTS NOUVEAUX, L'EXPLOITATION DES INSTALLATIONS ET LES SALAIRES DU PERSONNEL.
CERN
CE BUDGET CORRESPOND, POUR CHAQUE HABITANT DES ÉTATS MEMBRES, À QUELQUE 2 FRANCS SUISSES PAR AN.
POUR LA PLANIFICATION, LE CERN UTILISE UNE PROCÉDURE QUI CONSISTE À ESTIMER LES BUDGETS ET À PRÉVOIR LE PROGRAMME DE RECHERCHE POUR UNE PÉRIODE DE QUATRE ANS.


POUR SES RECHERCHES, LE CERN ACHÈTE DES ÉQUIPEMENTS RÉPONDANT À DES SPÉCIFICATIONS PRÉCISES AUPRÈS DU FOURNISSEUR LE MOINS CHER.
ACTION
LE CERN CHERCHE À UTILISER L'INDUSTRIE EUROPÉENNE SUR LE PLUS LARGE FRONT POSSIBLE.
CEPENDANT, LES ACHATS AUX ÉTATS MEMBRES NE SONT PAS DICTÉS PAR LE NIVEAU DE CONTRIBUTION AU BUDGET.
LES EXIGENCES TECHNIQUES DU CERN CONSTITUENT UN GRAND STIMULANT POUR LA TECHNOLOGIE INDUSTRIELLE DANS BEAUCOUP DE DOMAINES.
ÉLECTRONIQUE
VIDE
MÉTROLOGIE
ORDINATEURS
AIMANTS
SUPRACONDUCTIVITÉ
GÉNIE CIVIL
LES INDUSTRIES EUROPÉENNES ESTIMENT QU'EN MOYENNE CHAQUE FRANC SUISSE DE CHIFFRE D'AFFAIRES AVEC LE CERN PRODUIT 5,5 FRANCS SUISSES D'AFFAIRES NOUVELLES.
LA RECHERCHE EN PHYSIQUE DES PARTICULES EXIGE LA PARTICIPATION DE COMPÉTENCES MULTIPLES. ON PEUT CEPENDANT DIVISER LE PERSONNEL DU CERN EN QUATRE CATÉGORIES.
PLUS D'UN TIERS EST COMPOSÉ DE SCIENTIFIQUES ET D'INGÉNIEURS,
UN QUART DE TECHNICIENS ET DE DESSINATEURS,
UN AUTRE QUART DE MÉCANICIENS...
...ET LE RESTE EST DANS L'ADMINISTRATION.
DANS UN EFFECTIF DE 5000 PERSONNES, ENVIRON 3500 SONT MEMBRES DU PERSONNEL TITULAIRES ET 1500 SONT DES SCIENTIFIQUES DE L'EXTÉRIEUR VENANT AU CERN POUR FAIRE DE LA RECHERCHE.
LA GRANDE MAJORITÉ VIENT DES ÉTATS MEMBRES, SANS AUCUN QUOTA DE NATIONALITÉ.
PARMI TOUT CE MONDE, PERSONNE JUSQU'ICI N'EST PARVENU À COMPRENDRE VRAIMENT LE PROTON QUE JE SUIS. ET POURTANT, CE N'EST PAS L'OBSTINATION QUI MANQUE.



FIN

Première édition Septembre 1978

3 - Méthode de l'écriture directe «en dents de scie»
Explication donnée pour un carré d'ordre 7

				2			
			1	10			
		7	9			29	
	6	8					
5	14	16	25				5
13	15					4	
21					3	12	
22				2	11	20	

On écrit 1 dans la case supérieure du milieu
On devrait écrire 2 dans la case en pointillé qu'on décale vers le bas d'une longueur égale au côté du carré.

On se déplace en règle générale vers «le N.E.» ; on n'écrit pas 5 en dehors du carré ;

On est stoppé au nombre 7 par le 1. On fait subir à la ligne un décrochement d'une case vers le bas chaque fois qu'on vient d'atteindre un multiple de l'ordre, de 7 ici.

On va de 8 à 14 sans difficultés autres que les cassures entre 10 et 11 et entre 12 et 13, car on ne peut dépasser les bords du carré.

Cette méthode conduit au même résultat que la méthode mathématique qui sera exposée plus loin.

On pourra traiter, à titre d'amusement, les cas de l'ordre 3, de l'ordre 5, mais ceci est valable pour tous les ordres impairs.

(à suivre)

UN NOMBRE SE TERMINE PAR 4

Un nombre N est terminé par 4. Si on place ce 4 en tête du nombre, on obtient 2N. Trouver N

SOLUTION

$N = \overline{abc...fg4}$

$N = 10\,\overline{abc...fg} + 4$ Posons $\overline{abc...fg} = A$
nombre de p chiffres

$N = 10A + 4$ (1)

$2N = \overline{4\,abc...fg}$

$2N = 4 \times 10^p + A$ (2)

L'élimination de N entre (1) et (2) donne

$19A = 4(10^p - 2)$; $(10^p - 2)$ est multiple de 19

Il faut un peu de patience pour trouver la puissance de 10 qui donne 2 comme reste lorsqu'on la divise par 19 (faire la division). Il s'agit de 10^{17}.
Le quotient Q est
5263157894736842
A est égal à 4Q: 21052631578947368
et N à 210526315789473684

Voyage dans la quatrième dimension : le volume des hyperboules (Suite)

Dans le numéro 84-85, nous cherchions le volume V_n de la boule de rayon 1 dans un espace de dimension n.

Nous savons que $V_1 = 2$, $V_2 = \pi$, $V_3 = \frac{4}{3}\pi$, et nous avons montré que la suite V_n satisfait à la relation de récurrence suivante.

$$V_n = \int_{-1}^{1} V_{n-1} \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{n-1} dx$$

La fonction sous le signe $\int$ étant paire, on a :

$$V_n = 2\, V_{n-1} \int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{n-1} dx$$

On peut procéder à un changement de variable en posant $x = \cos t$, d'où $dx = -\sin t\, dt$ et $\sqrt{1-x^2} = \sin t$, et par suite :

$$V_n = 2\, V_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt$$

Les lecteurs du PA spécial π auront reconnu ici l'intégrale de Wallis, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt$, citée et calculée en page 78 de cet ouvrage.

Notre relation de récurrence s'écrit alors :

$$V_n = 2 V_{n-1} I_n$$

c'est-à-dire :

$$V_2 = 2V_1 I_2,\ V_3 = 2V_2 I_3, \ldots V_n = 2V_{n-1} I_n$$

Nous avons ici n-1 égalités dont on effectue le produit membre à membre, ce qui donne, après simplification :

$$V_n = 2^{n-1} V_1 . I_2\, I_3 \ldots I_n,$$

soit : $$\boxed{V_n = 2^n . I_2 I_3 \ldots I_n} \quad (1)$$

Pour aller plus loin, il faut utiliser l'expression de I_n (PA spécial π, p.78).

Si l'on pose $a_m = \dfrac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots\ 2m}$

on a : $I_{2m} = \frac{\pi}{2} a_m$

et $I_{2m+1} = \dfrac{1}{(2m+1)a_m}$

d'où : $$\boxed{I_{2m}\ I_{2m+1} = \frac{\pi}{2\,(2m+1)}} \quad (2)$$

Et l'on calcule enfin V_n, en distinguant deux cas selon la parité de n.

Si n est impair, $n = 2m+1$, la formule (1) ci-dessus s'écrit :

$$V_{2m+1} = 2^{2m+1} (I_2 I_3)(I_4 I_5) \ldots (I_{2m}\, I_{2m+1})$$

et la formule (2) conduit à

$$V_{2m+1} = 2^{2m+1} \frac{\pi}{2.3}\ \frac{\pi}{2.5} \cdots \frac{\pi}{2.(2m+1)}$$

soit :

$$\boxed{V_{2m+1} = \frac{2^{m+1}\ \pi^m}{1.3.5\ldots.(2m+1)}} \quad (3)$$

De façon tout à fait similaire, on trouve : $\boxed{V_{2m} = \frac{\pi^m}{m!}}$ (4)

Donnons par exemple les premières valeurs :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
V_n	1	2	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{\pi^2}{2}$	$\frac{8\pi^2}{15}$	$\frac{\pi^3}{6}$	$\frac{16\pi^3}{105}$	$\frac{\pi^4}{24}$	$\frac{32\pi^4}{945}$
V_n approché	1	2	3,14159	4,18879	4,93480	5,26379	5,16771	4,72477	4,05871	3,29851

Notez que l'on pose $V_0 = 1$ sans que cette égalité ait aucune interprétation géométrique, mais seulement par prolongement des égalités concernant V_n. Notez aussi que la boule de rayon R en dimension 4 a pour volume $\frac{\pi^2}{2} R^4$

La troisième ligne du tableau ci-dessus donne une curieuse indication : lorsque n augmente, le volume V_n commence par augmenter, mais il semble ensuite diminuer à partir de n=5 : un calcul que vous pouvez conduire vous-même confortera cette impression. Vous pourrez voir que le volume de notre boule avoisine l'unité pour n = 13 puis diminue encore et tend vers 0 quand $n \longmapsto +\infty$. Et même assez vite, puisque la formule de Stirling (PA spécial π, p.85) nous permet de montrer que V_n est équivalent à :

$$\left(\frac{2\pi e}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

Mais il peut sembler étrange que V_n ait deux expressions bien différentes selon la parité de n. C'est ici que l'on doit recourir à la généralisation de la factorielle due au génial Euler. Lorsque l'on considère les points de coordonnées x=n, y=n! dans un repère cartésien, on a envie de joindre ces points par une courbe, et de prolonger ainsi la fonction $n \longmapsto n!$ à des valeurs non entières de n, de même que l'on assigne une valeur à a^n pour des valeurs non entières de n.

C'est pourquoi Euler a introduit la fonction $\Gamma(x)$, qui vérifie :

$\Gamma(x) = (x-1)!$ pour x entier positif, qui est définie pour tous les réels strictement positifs (ou négatifs non entiers), et qui satisfait à la relation : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout x convenable.

Des considérations que nous ne pouvons développer ici, mais que l'on trouvera dans les ouvrages de la bibliographie, amènent à poser $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, d'où:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

et ainsi de suite jusqu'à :

$$\Gamma\left(\frac{2m+3}{2}\right) = \Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2m+1}{2}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1.3\ldots(2m+1)}{2^m}\sqrt{\pi}.$$

Le volume V_{2m} s'exprime avec cette fonction, sous la forme :

$$V_{2m} = \frac{\pi^m}{\Gamma(m+1)}$$

ou encore : $\boxed{V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}}$ (4)

Et justement, cette formule est encore valable pour n impair !

Car si l'on fait n=2m+1, on obtient

$$V_n = \frac{\pi^{\frac{2m+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{2m+3}{2}\right)}$$

, et aprés avoir remplacé $\Gamma\left(\frac{2m+3}{2}\right)$ par sa valeur trouvée plus haut, on reconnaît bien le V_{2m+1} de la formule (3)

La formule (4) résout donc la question quelle que soit la parité de n. Elle est identique à celle qui figure dans le PA spécial π, p. 230.

On pourrait même aller plus loin, et considérer la fonction

$$V(x) = \pi^{\frac{x}{2}} \Big/ \Gamma\left(\frac{x}{2}+1\right)$$

définie pour tout x réel, et qui nous donne le volume d'une boule de rayon 1 en dimension x, ou plutôt qui nous le donnerait si l'on pouvait définir un tel objet. Pour x positif, cette fonction commence par croître, comme nous l'avons vu, puis elle décroît et tend vers 0 quand $x \longmapsto +\infty$. Elle passe par un maximum pour une valeur de x située entre 5 et 6. C'est un très beau résultat, souligné par M. Le Lionnais dans «les Grands Courants de la pensée mathématique» (Blanchard, 1962, p 448). Malgré leur sécheresse apparente, nos bonnes vieilles mathématiques ont encore de quoi nous faire rêver...

R.C.

Bibliographie :

J. Bass, Cours de mathématiques, vol 1, chapitre XXIX (Masson, 1968).

N. Bourbaki, Eléments de Mathématique, livre IV : Fonctions d'une variable réelle, chapitre 7 : La fonction gamma (Hermann, 1961).

P.A. A LU, VU, ENTENDU

(ce que l'on peut faire dire aux mathématiques)

Entendu dans un prône :

La sphère de l'intelligence et la sphère de la foi sont tangentes en plusieurs points.

D'un journaliste :

L'énergie d'une voiture croît exponentiellement avec la vitesse, c'est-à-dire que si on double la vitesse, on multiplie par quatre l'énergie.

La croissance exponentielle de ce journaliste n'est pas celle du mathématicien !

NOMBRES PREMIERS :

Un bien curieux tableau ...

Construisons un tableau infini de la manière suivante :

sur la 1ere ligne : 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28....

Vous avez deviné : à partir de 4 on ajoute toujours 3

sur la 2eme ligne : 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42...

à partir de 7 on ajoute toujours 5

sur la 3eme ligne : 10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, 59...

à partir de 10 on ajoute toujours 7

Vous devinez que la 4eme ligne débutera par 13 et qu'on ajoutera toujours 9 : 13, 22, 31, 40, 49, 58, 67, 76,....

Et sur la 5eme ligne : 16, 27, 38, 49, 60, 71, 82,...

Et sur la 6eme ligne : 19, 32, 45, 58, 71, 84, 97,...

Et sur la 7eme ligne : 22, 37, 52, 67, 82, 97, 122,...

etc... la n^{ieme} ligne commençant par le n^{ieme} terme de la 1ere ligne...

On obtient un tableau...

4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37...
7	12	17	22	27	32	37	42	47	52	57	62...
10	17	24	31	38	45	52	59	66	73	80	87...
13	22	31	40	49	58	67	76	85	94	103	112...
16	27	38	49	60	71	82	93	104	115	126	137...
19	32	45	58	71	84	97	110	123	136	149	162...
22	37	52	67	82	97	122	137	152	167	182	197...
⋮											

.... qui est infini dans tous les sens.

A quoi peut donc servir ce tableau ? Eh bien, cher lecteur, considérez un nombre impair, supérieur à 9 ; ce nombre est-il un nombre premier ? Ce n'est pas une question facile et à moins de posséder une bonne table de nombres premiers ou un bon programme d'ordinateur (ou de calculette programmable), la réponse n'est pas aisée. (Eratosthène où es-tu ?).

Ce tableau n'est certes pas la panacée mais il permet de répondre à la question grâce au théorème suivant :

> «Le nombre $p = 2n + 1$ est premier si et seulement si le nombre n ne figure pas dans ce tableau»

dont l'utilisation est assez simple. **Exemple 1 :** 299 est-il premier ? Il suffit de regarder si $\frac{299 - 1}{2} = 149$ est ou non dans le tableau. 149 est dans le tableau, 299 n'est pas premier (vérifions que $299 = 13 \times 23$)

Exemple 2 : 73 est-il premier ? Testons $\frac{73 - 1}{2} = 36$
36 n'est pas dans le tableau : 73 est premier.

Il reste bien sûr à établir un tableau **assez grand**... mais ne peut-on pas se faire aider par une calculatrice programmable ?

Autre question, cher lecteur, saurez-vous établir, grâce à quelques remarques élémentaires, le théorème précédent ?

Un bien curieux tableau (Solution)

démonstration du théorème

La m^{ieme} **ligne** du tableau est une suite arithmétique de raison $2m + 1$

La 1ere **colonne** est une suite arithmétique de raison 3 et de 1er terme 4. d'où : le premier terme de la m^{ieme} colonne est : $4 + 3(m-1)$ soit $3m + 1$.

Le k^{ieme} terme de cette m^{ieme} ligne est alors :

$$(3m + 1) + (k - 1)(2m + 1) = 2mk + m + k$$

appelons **ce terme général $a_{m\,;\,k}$** soit :

$P = 2\,A_{m,k} + 1$

$P = 4mk + 2m + 2k + 1$

$P = (2m+1)(2k + 1)$ P est un nombre composé donc non premier (k et m sont des entiers supérieurs à 1)

Si n appartient au tableau, P $= 2n + 1$ n'est pas premier

Réciproquement Si $p = 2n + 1$ est un nombre composé, il est produit de deux nombres impairs, cela impose :

$P = (2k + 1)(2m + 1)$

Calculons $n = \frac{P - 1}{2}$

$$N = \frac{4mk + 2k + 2m}{2} = 2mk + m + k$$

on trouve $n = a_{m;k}$ **si p est «composé» n appartient au tableau**
Donc :

> le nombre $p = 2n + 1$ est premier si et seulement si n ne figure pas dans ce tableau.

Question subsidiaire : étant donné un nombre n, existe-t-il un critère (simple !) pour dire si n appartient ou non à ce tableau ? Dans l'affirmative, cela donnerait, alors, une grande utilité à ce tableau !

Inspiré de Aleph Zéro. Hachette 1973 Nombres Entiers

DES TRIANGLES NOUVEAUX

Dans tous les triangles, les hauteurs, les médianes et les bissectrices intérieures sont concourantes.

J. Kuntzmann pose la question et la résout : «Existe-t-il des triangles dans lesquels la hauteur AH, la médiane BM et la bissectrice CD concourent ?»

Il s'agit :

1 - de construire de tels triangles

2 - de les caractériser par une relation entre les côtés et les angles.

3 - de reconnaître dans un tel triangle les différents sommets.

SOLUTION

M étant le milieu de AC, les aires de MAB, MCB d'une part, MAK, MCK d'autre part sont égales; donc les aires de ABK et de CBK le sont aussi.

$AK.BH = BC.KH$

ou $\dfrac{KA}{KH} = \dfrac{BC}{BH}$

Mais le théorème de la bissectrice donne :

$$\frac{KA}{KH} = \frac{CA}{CH}$$

donc $\dfrac{BC}{BH} = \dfrac{CA}{CH}$

$CH = b \cos \widehat{C}$; $BH = a - b \cos \widehat{C}$

$a\ b \cos \widehat{C} = b\ (a - b \cos \widehat{C})$

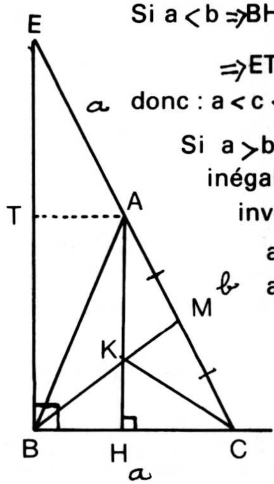
$$\cos \widehat{C} = \frac{a}{a+b}$$

Il en résulte que l'intersection E de AC avec la perpendiculaire en B à BC est telle que $CE = a + b$ donc que $AE = a$.

Construction des triangles : On se donne un triangle EBC rectangle en B, on porte $EA = BC$ sur EC. ABC est le triangle cherché.

Identification des sommets : il s'agit de reconnaître les trois droites concourantes :

la hauteur AH, la médiane BM et la bissectrice issue de C.



Si $a < b \Rightarrow BH < HC \Rightarrow c < b$

$\Rightarrow ET < TB \Rightarrow a < c$

donc : $a < c < b$

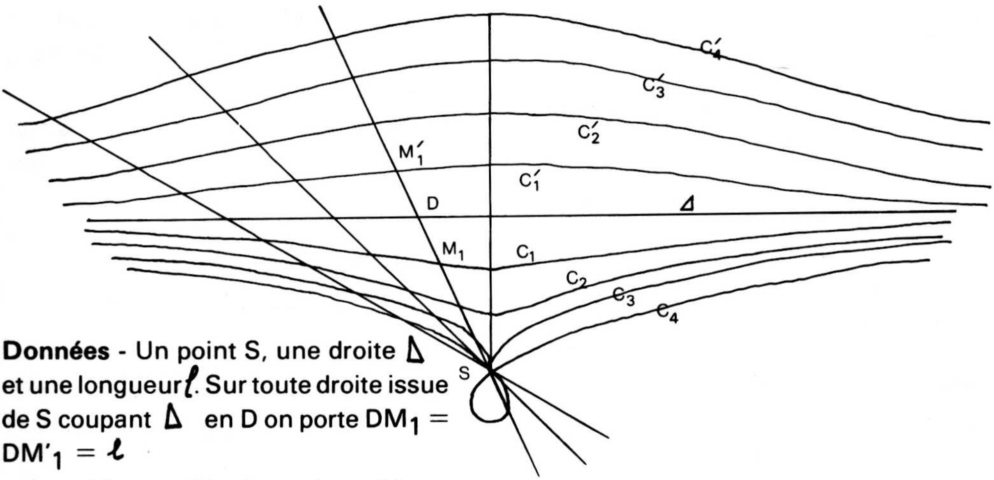
Si $a > b$, toutes les inégalités sont inversées.

$a > c > b$

$a \gtrless b \Rightarrow \widehat{C} \gtrless 60^o$

Si on donne le côté BC fixe, quel est l'ensemble des points A ? Il s'obtient en menant $BE \perp BC$ et en prenant A sur CE tel que $EA = BC$. La courbe obtenue que l'on peut tracer par points est appelée CONCHOÏDE de la droite BE pour le point C et la longueur BC.

REMARQUE : Si on porte sur CE, $EA = BC$, mais de l'autre côté de la droite BE on obtient un triangle ABC dans lequel concourent la hauteur AH, la médiane BM et la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{C}$.



Données - Un point S, une droite Δ et une longueur ℓ. Sur toute droite issue de S coupant Δ en D on porte $DM_1 = DM'_1 = \ell$

L'ensemble des points M_1 et M'_1 est appelé conchoïde de la droite Δ. La figure représente 4 conchoïdes relatives à la même droite Δ et au même point S.

CALCUL FARCE & ATTRAPE

Sur une idée de «Mathematical Pie» (1975) et de John Napier et Henry Briggs (1615)

Bien des calculatrices permettent le calcul de 5^{100}.

$5^{100} = 7,888608706.. \times 10^{69}$

Elever ce nombre à la puissance 100 n'est pas plus difficile :

$(5^{100})^{100} = 5,012350782 \times 10^{89} \times (10^{69})^{100}$

$5^{10000} = 5,012350782.. \times 10^{6989}$

Encore un effort :

$(5^{10000})^{100} = 1,009591496 \times 10^{70} \times 10^{698900}$

$5^{(10^6)} = 1,009591496 \text{ X } 10^{698970}$

Extraire la racine millionième est un jeu.

de 5^{10^6}, c'est 5

de 1,009591496, c'est 1 suivi d'ur grand nombre de zéros

de 10^{698970} c'est $10^{0,698970}$

ainsi $5 \simeq 10^{0,698970}$

mais $a = 10^{\log a}$

on a donc : $\log 5 = 0,698970...$

Nos jeunes lecteurs savent que la calculatrice pour nous donner 5^{100} a utilisé ce résultat.

Nous avons donc tourné en rond... sans perdre tout à fait notre temps.

LA PILE DE DOMINOS (SOLUTION)

Prenons comme origine des abscisses le plan vertical passant par le bord du domino qui déborde le plus et comme unité la longueur d'un domino. Soient $x_1, x_2, \dots x_n$ les abscisses des centres de gravité des dominos x_i correspondant au domino du dessus.

Soient $X_2, X_3, \dots, X_n$ les abscisses des centres de gravité des ensembles des 2, 3,..., n dominos supérieurs.

D'après la définition du centre de gravité :

$$n X_n = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n$$

La condition d'équilibre est que le centre de gravité de l'ensemble des (n-1) dominos du dessus soit au dessus du bord libre du n[ieme].

$$X_{n-1} = x_n - \frac{1}{2}$$

$$x_n = X_{n-1} + \frac{1}{2}$$

On peut remplacer

$$x_1 + x_2 + \quad + x_{n-1}$$

par $(n-1) X_{n-1}$

$$n X_n = (n-1) X_{n-1} + X_{n-1} + \frac{1}{2}$$

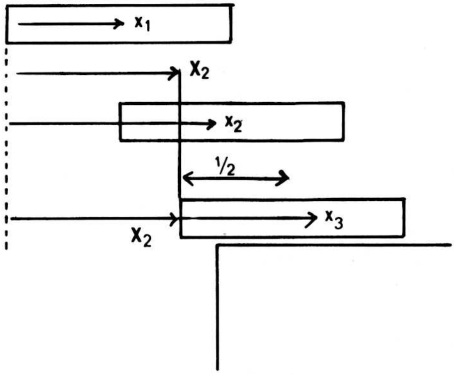
$$n X_n = n X_{n-1} + \frac{1}{2}$$

$$X_n = X_{n-1} + \frac{1}{2n}$$

$$X_{n-1} = X_{n-2} + \frac{1}{2(n-1)}$$

....

$$X_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$



$$X_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$X_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

On reconnaît les premiers termes de la série harmonique.

On en conclut qu'on peut utiliser un nombre infini de dominos, le domino supérieur surplombant le vide d'autant qu'on le veut.

Réussir l'expérience avec n = 5 n'est déjà pas si mal !

Le domino supérieur est tout à fait au dessus du vide.

URGENT :
Réabonnement 1983 !
voir page 24

C'EST DU BILLARD !

SOLUTION

Billard elliptique :

La boule repasse par l'autre foyer

Si elle fait des rebonds en nombre quelconque, elle va d'un foyer à l'autre et sa trajectoire tend vers le grand axe parcouru dans les deux sens.

Billard circulaire

Soit M (x, y) le point du cercle où la boule A rebondit. Il faut écrire l'égalité des angles $A\widehat{M}O$ et $O\widehat{M}B$

tg (OM, AM) = tg (BM, OM)

$$\frac{\frac{y}{x-3}-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x-3}\times\frac{y}{x}}=\frac{\frac{y}{x}-\frac{y-1}{x+2}}{1+\frac{y}{x}\times\frac{y-1}{x+2}}$$

$$3y(x^2+y^2+2x-y)=(2y+x)(x^2+y^2-3x)$$

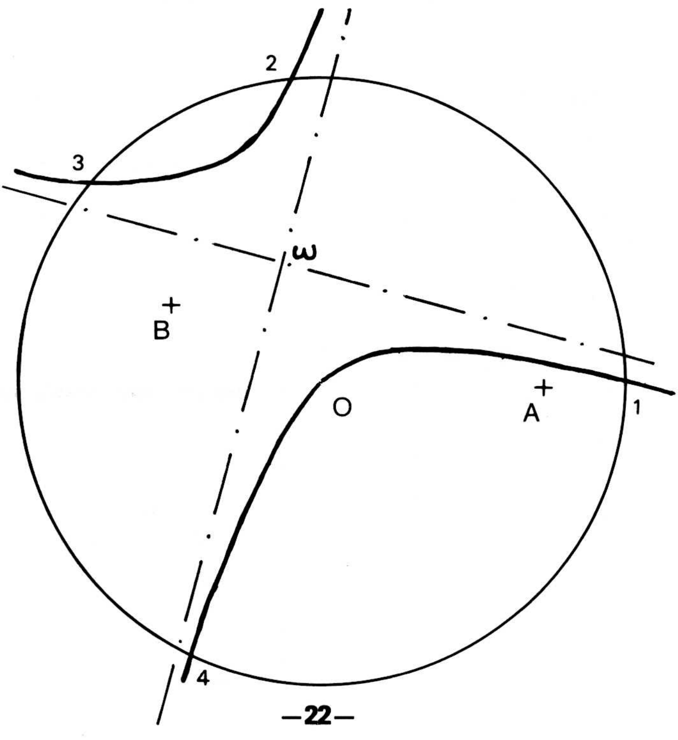
Mais M appartient au cercle :
$x^2+y^2=16$

$$3x^2-3y^2+12xy-16x+16y=0$$

Cette équation est celle d'une hyperbole équilatère. Son centre est :
$x=-\frac{16}{30}$ $y=\frac{16}{10}$

(Les coefficients directeurs des asymptotes sont $2+\sqrt{5}$ et $2-\sqrt{5}$). Elle passe par l'origine. Elle est donc facile à tracer.

Elle coupe le cercle en quatre points 1, 2, 3, 4 qui sont les solutions du problème.



LES PROBLEMES DU PETIT ARCHIMEDE

A NOUVEAU LA GEOMETRIE

J'ai déjà signalé que les nouvelles orientations de l'enseignement mathématique en France me semblent rompre heureusement avec les excès formalistes de ces dernières années, en mettant à l'honneur les tâtonnements de la recherche et l'initiative du chercheur. Nous pouvons espérer que l'on ne reverra plus ces mornes exercices qui consistaient à reproduire, comme un perroquet, des relations arbitraires dans des ensembles sans intérêt, ou bien à traiter par l'algèbre linéaire, sans rien y voir ni rien y comprendre, des questions simples de géométrie dans l'espace. Mais il ne faudrait pas tomber dans l'excès inverse et qu'à la géométrie sans figures succède la géométrie sans démonstrations. Les bricolages de toutes sortes constituent une des voies d'accès à l'activité mathématique, mais ils n'en sont pas le but, et l'on peut fabriquer dix sortes de polyèdres en carton sans avoir vraiment **fait** des mathématiques.

Pour illustrer mon propos, je vous propose quatre énoncés géométriques envoyés par nos lecteurs.

Tout d'abord, de la part de Jean-Marie Becker, de Saint Etienne.

PB 155 - Soit un quadrilatère convexe ABCD, où I, J, K, L, M, N sont les milieux de AB, BC, CD, DA, AC, BD. On nomme S l'intersection de AC et BD, et l'on achève, avec le point R, le parallélogramme SNRM. Démontrer que les quadrilatères RLAI, RIBJ, RJCK, RKDL ont même surface.

Monsieur Marc Blanchard, du Caire, généralise le «problème de Napoléon» dont a parlé M. Ehrhart dans le P.A. N° 86-87 page 10. Et voici ce qu'il nous demande :

PB 156 - Extérieurement au triangle ABC, on construit des triangles **isocèles** ABC', BCA', CAB' ayant le même angle à la base, de mesure α. Démontrer que les trois droites AA', BB' CC' sont concourantes en un point M et déterminer l'ensemble des points M lorsque α varie.

C'est un problème que nous avait soumis M. Puissegur il y a quelques années, à un moment où l'état des mœurs mathématiques ne m'avait pas semblé propice à la présence d'un tel énoncé dans la présente rubrique : les temps ont changé.

Continuons par un envoi de M. Roux, de Chadrac :

PB 157 - Quel est le plus grand carré qui peut être contenu dans un cube d'arête 1 ?

Et enfin, une question posée par un lecteur d'Abbeville qui n'a pas donné son nom :

PB 158 - Par un point P donné peut-on mener une droite qui coupe les côtés d'un angle donné $\widehat{xOy}$ suivant un segment MN de longueur donnée ?

LE PETIT ARCHIMÈDE

Revue de l'Association pour le Développement de la Culture Scientifique

10 numéros par an

ABONNEMENT 1983

Abonnement de Soutien : **120F** ☐ (1)

Abonnement de Bienfaiteur : 500F ☐ (1)

Abonnement ordinaire : **60F** ☐ (1)

Abonnements groupés (minimum 10) : **40F** ☐ (2)

(Ils peuvent être servis à une ou plusieurs adresses)

MAJORATION POUR TOUT ENVOI HORS EUROPE
ou PAR AVION (le préciser) de 50 %

Toutes les collections anciennes sont disponibles :

N° 1 à 10, 11 à 20, 21 à 30, 31 à 40, 41 à 50, 51 à 60, 61 à 70, 71 à 80, 81 à 90 : 50 F

Prix de vente au n° 10 F

PRODUCTIONS SPECIALES

Le nouveau calendrier perpétuel : 50 F le paquet de cinquante ☐ (3)
(en voie d'épuisement)

N° Spécial PA Sp1 (index général PA1 à PA50) : 5 F ☐ (1)

N° Spécial Pi : 75 F - A partir de 4 exemplaires : 70 F l'unité
A partir de 10 exemplaires : 60 F l'unité ☐ (2)

NOM : Prénom :

Adresse d'expédition :

Code Postal : Ville :

Bureau distributeur :

Cette demande est à adresser exclusivement à :

ADCS - Abonnement - 61 rue St Fuscien 80000 AMIENS

Joindre chèque ou mandat à l'ordre de :

ADCS CCP 4736 63 W LILLE

(1) cocher les cases utiles

(2) Nombre d'exemplaires

(3) Nombre de paquets de cinquante cartes postales

LES ETABLISSEMENTS SCOLAIRES PEUVENT-ILS ÉVITER LES DEMANDES DE FACTURE ? MERCI

Adresser toute correspondance rédactionnelle à :

Y. ROUSSEL - 61 rue St Fuscien 80000 AMIENS

Revue éditée par l'A.D.C.S. - Le Directeur de la publication J.C. HERZ

IMPRIMERIE I & RG AMIENS Tél. 92.60.16

© Dépôt légal Décembre 82 No 90 : 10 F

ATTENTION, l'abonnement 1983 est à 60 F