le petit

archimède

10 numéros par an

PASCAL, FERMAT et GAUSS

1623-1662 1601-1655 1771-1855

PA 91-92

JUIN 1983

SOMMAIRE

NOS CONVENTIONS pour les « petits » facile
difficulté moyenne pour les grands

En guise d'éditorial :

Un premier numéro 1983 ... qui vous arrive bien tard ! Cependant vous recevrez -au plus vite - l'intégralité des 24 x 10 = 240 pages annuelles de votre PA ! Vie et survie de votre périodique sont liées à son audience et à l'énergie de chacun d'entre nous. L'A.D.C.S. et l'équipe rédactionnelle de P.A. restent plus que jamais déterminées à faire le maximum pour votre revue. Il vous appartient, légitimement, de faire en sorte que nous soyons beaucoup plus connus et lus. Nous attendons aussi vos textes, suggestions...

La rédaction

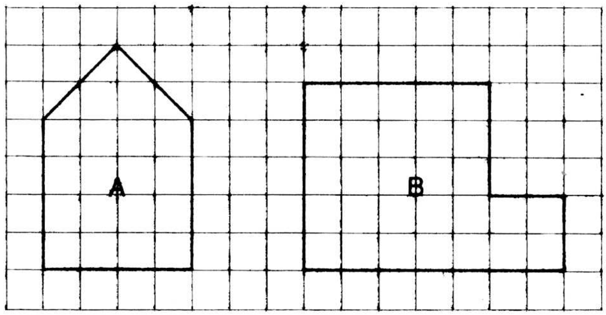
DEUX PROBLEMES DE DECOUPAGE

Un facile :

Découper chacune de ces figures en morceaux permettant de reconstituer un carré : on connaît donc le côté du carré !

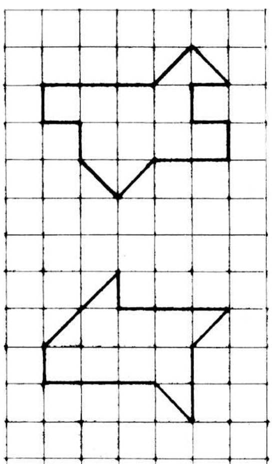
Pour A, on pourra découper en trois morceaux.

Pour B, on pourra découper soit en trois, soit en quatre morceaux.



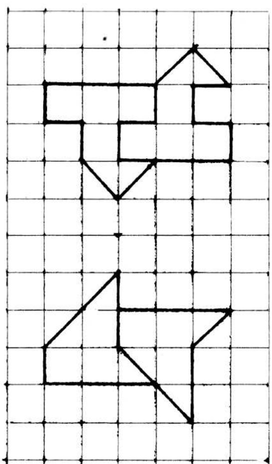
Un moins facile :

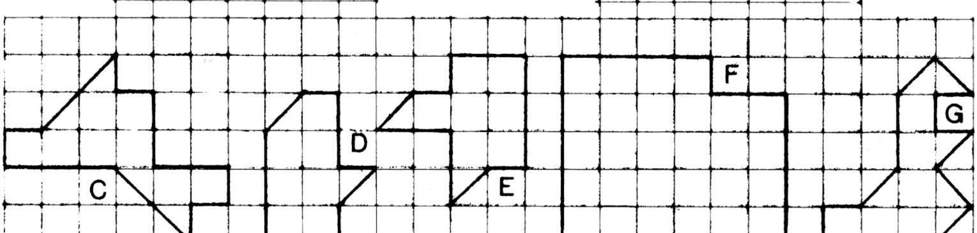
Découper chacune de ces figures en deux morceaux superposables.

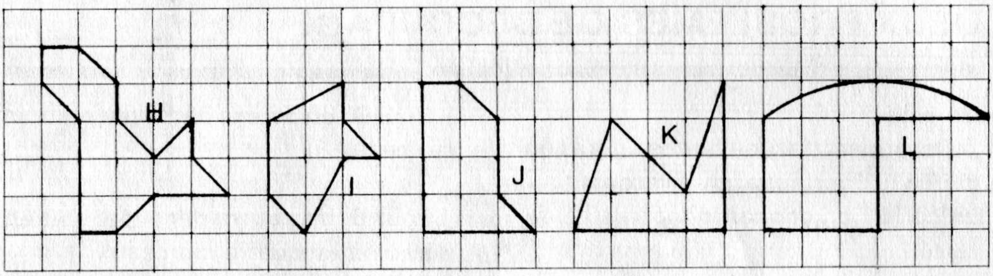


provient de

provient de







En procédant comme dans les exemples donnés, nos lecteurs inventeront autant de figures qu'ils le voudront.

Guilloud

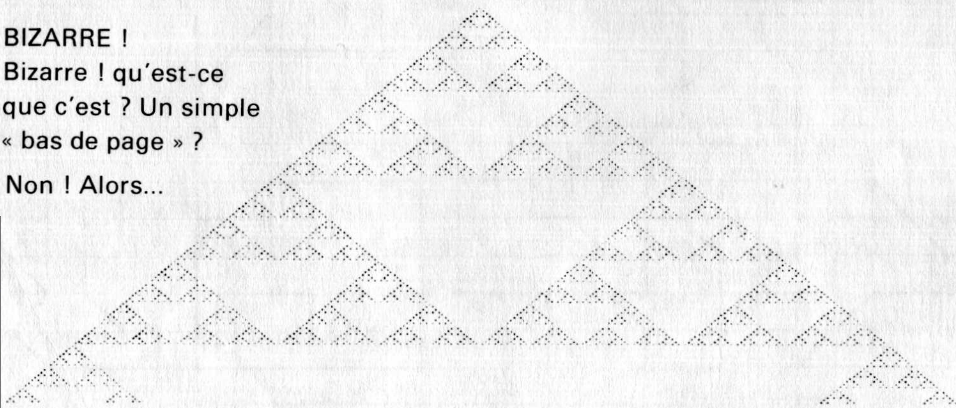
PI AU CARRE

Vous trouverez page 37 de votre P.A. les 995 premières décimales du nombre d'Archimède, c'est-à-dire de PI. (Et vous en avez d'ailleurs plus de 27 000 dans le numéro « spécial PI »). D'où une première idée de problème :
Problème : Connaissant ces 995 décimales (et celles-là seulement), quel est le rang de la dernière décimale de π^2 que l'on peut garantir et quelle est-elle ? Naturellement on s'efforcera d'obtenir ces résultats en faisant le moins de calcul possible. L'emploi de calculettes n'est pas interdit.

Sur une idée de J. Kuntzmann

BIZARRE !
Bizarre ! qu'est-ce que c'est ? Un simple « bas de page » ?

Non ! Alors...

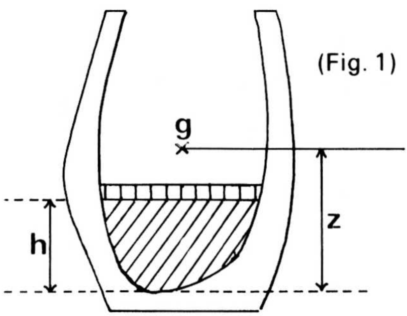


UNE CURIEUSE PROPRIETE D'UN CENTRE DE GRAVITE

Etant donné un récipient de forme quelconque que l'on remplit de liquide, le centre de gravité de l'ensemble récipient + liquide est, en général, le plus bas possible lorsqu'il est exactement à la surface du liquide.

Cette propriété assez inattendue peut se démontrer de façon assez élémentaire. Appelons h la hauteur variable du liquide et z la cote du centre de gravité g de l'ensemble récipient plus liquide (que nous appellerons ensemble S). z et h sont mesurés à partir du plan horizontal **du fond intérieur du vase** (h = 0 veut donc dire que le vase est vide).

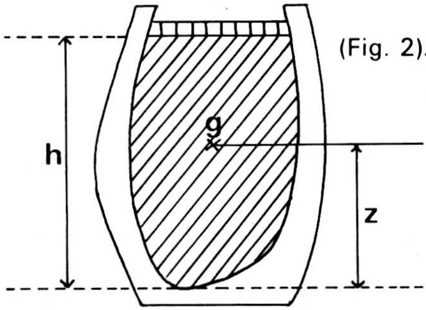
Supposons que l'on ait $z > h$ (Fig. 1) et rajoutons une petite quantité de liquide : la cote du centre de gravité va diminuer (en alourdissant l'ensemble S **au-dessous** de son centre de gravité, on fait descendre celui-ci (1)). Au contraire, si on enlève du liquide, le centre de gravité va monter car on allège la partie située au-dessous de g.



(Fig. 1)

On en conclut que pour $z > h$, la cote z de g est **une fonction décroissante de h.**

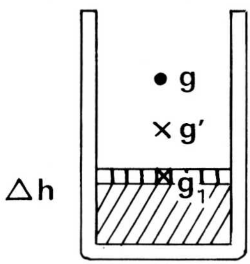
Pour $z < h$, on voit de la même façon que z est une **fonction croissante de h** : rajouter du liquide fait monter le centre de gravité, en enlever le fait descendre (Fig. 2).



(Fig. 2).

Dans ces conditions, soit z_0 la cote du centre de gravité g_0 du récipient **vide.** Supposons $z_0 > 0$. Remplissons le vase et considérons les variations de la fonction z (h). Au départ $z = z_0$ et $h = 0$, donc $z > h$: la fonction z (h) est **décroissante.** Comme h augmente, il arrivera un moment où on aura $z < h$ (sauf si le vase est « plein » avant), alors z (h) sera **croissante.** Comme z (h) est une fonction continue, elle aura donc passé par **un minimum pour $z = h$.**

(1) Pour ceux qui trouveraient ce raisonnement trop intuitif, voici une justification mathématique : si on rajoute une petite couche de liquide d'épaisseur Δh, le centre de gravité g de l'ensemble S est remplacé par le point g' barycentre du couple de points suivants :
- g affecté de la masse (récipient + liquide)
- g_1 centre de gravité de la couche de liquide rajouté, affecté de la masse de celle-ci. Ces 3 points sont alignés et si $\Delta h < z-h$, g_1 est **au-dessous** de g, donc aussi g'.



Remarque : Le résultat précédent n'est vrai que si la fonction $z(h)$ présente effectivement une phase décroissante suivie d'une phase croissante. Il peut exister des récipients, pour lesquels on n'aura qu'une seule de ces phases.

Par exemple supposons $z_0 < 0$, le centre de gravité du vase vide est au-dessous du fond du vase (exemple : un verre à fond très épais, Fig. 3). Dans ce cas la fonction $z(h)$ est croissante dès le départ et le minimum est atteint pour $h = 0$, c'est-à-dire le vase vide (et $z(o) = z_0 < h$).

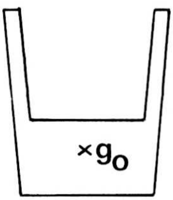


Fig. 3

Une autre situation peut être réalisée avec un vase percé d'une ouverture latérale (Fig. 4) et g_0 au-dessus du niveau de cette ouverture. Dans ce cas, le vase peut être « plein » avant que $z(h)$ n'ait cessé de décroître et le minimum de $z(h)$ est alors atteint pour $z > h$.

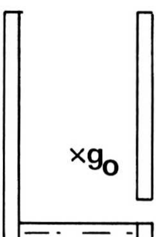


Fig. 4

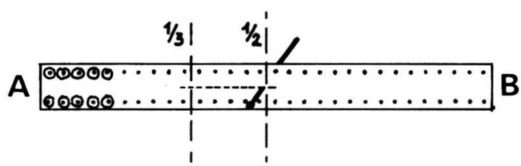
Bref, le « théorème » énoncé au début de cet article est vrai seulement pour un récipient « normalement » constitué : verre, seau, bouteille, casserole, vase à fleurs, etc... !

Vérification expérimentale :

Il serait intéressant de faire une vérification expérimentale de cette propriété. Avec un vase et un liquide transparents, il suffirait de pouvoir « visualiser » le centre de gravité et de suivre ses déplacements. Malheureusement, personne n'a encore trouvé le moyen de rendre visible dans un liquide ou un solide ce point remarquable qu'est le centre de gravité, pourtant aussi cher aux mathématiciens qu'aux physiciens... C'est vraiment un point « fictif ».

Par contre tout le monde connaît la détermination pratique du centre de gravité d'un morceau de carton en le suspendant à un clou. Nous allons nous inspirer de ce procédé.

Remplaçons le vase par une bande de carton assez épais (25 à 30 cm de long, 2 à 3 cm de large) et le liquide par ... des punaises. Avec un clou mince faites des trous alignés, espacés d'environ 5 mm sur deux droites parallèles, à 6 mm environ des bords du carton (ces trous serviront pour les punaises). A mi-distance des bords, entre 1/3 et 1/2 de la longueur, faites d'autres trous plus serrés (2 mm) : ils recevront l'aiguille destinée à repérer le centre de gravité.

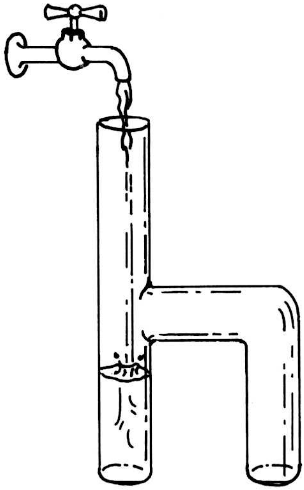


Plantez maintenant des punaises dans les trous latéraux à partir de l'extrémité A, symétriquement pour faciliter la recherche du centre de gravité. Puis avec une aiguille ou une épingle enfilée dans l'un des trous médians, déterminez (approximativement) la position de ce centre de gravité : votre aiguille passe en ce point (ou à la verticale de ce point) si votre bande de carton reste horizontale et en équilibre tel le fléau d'une balance. Après quelques tâtonnements (quitte à rajouter une ou deux punaises en des points convenables pour modifier le « vase »), vous arriverez à une position de l'aiguille telle que, que vous enleviez les deux dernières punaises ou que vous en rajoutiez deux autres, votre « fléau » penchera du côté de A.

Le centre de gravité aura alors atteint sa position la plus proche de A et vous pourrez vérifier (à quelques mm près) que le point g est bien aligné avec le bord des dernières punaises...

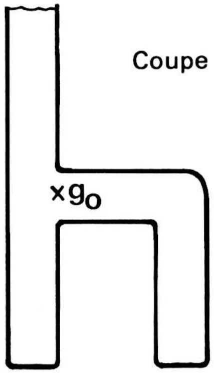
*

Problème : A ceux de nos lecteurs que la question aura intéressés nous posons le problème suivant :



Voici un vase (vraiment bizarre !) en forme d'h : (ouvert en haut et fermé en bas, bien sûr).

On le remplit d'eau avec un robinet à débit constant. Pourriez-vous représenter graphiquement les formes possibles des variations de la cote z du centre de gravité de l'ensemble (vase + eau), en fonction du **temps,** cette fois-ci ?



(Réponse dans le prochain P.A.)

PASCAL, 1623-1662 FERMAT 1601-1655 et GAUSS 1771-1855

Etude du triangle obtenu en substituant aux coefficients du binôme leur reste de division par 2. On l'appellera : triangle de Pascal, modulo 2 (TP_2)

1° La formule de Newton qui donne le développement de $(a+b)^n$ montre que tous les coefficients sont pairs lorsque n est une puissance de 2 sauf le premier 1 et le dernier 1.

Nommons les lignes de TP_2 : 0, 1, 2...

Le nombre qui correspond à la ligne 4 est 1 0 0 0 1

2° La règle bien connue qui permet le calcul des lignes du triangle de Pascal (Fig. 1) est applicable au TP_2

```
            1
         1     1
      1     2     1
   1     3     3     1
1     4     6     4     1
```

Fig. 1

et donne

```
               1
            1     1
         1     0     1
      1     1     1     1
   1     0     0     0     1
1     1     0     0     1     1
1     0     1     0     1     0     1
```

Fig. 2

3° L'emploi de cette règle à partir de la ligne 4 conduit à reconstruire sous chacun des « 1 » entourés d'un triangle un « triangle » identique à celui qui est entouré de festons

4° Nommons T_1 ou $T_2 0$ le « triangle » formé des lignes 0 1 de TP_2, T_2 ou $T_2 1$ celui formé par les lignes 0 1 2 3, $T_2 p$ celui formé par les lignes 0 1 2 ... $(2^{p+1} - 1)$.

Tout « triangle » $T_2 p$ est formé de trois triangles identiques au « triangle » $T_2 p - 1$ (on raisonne comme dans 1°, 2°, 3°)

En appelant motif triangulaire fermé tout « triangle » T le TP_2 est formé de tels motifs juxtaposés déduits de l'un d'eux par translation:

Nombre des éléments non nuls d'un TP_2 :

On représentera ici le TP_2 en mettant un point (●) à la place des chiffres 1 et rien à la place des chiffres 0. Soit à compter les points de la ligne de rang r ; soit s(r) leur nombre.

On expliquera le calcul pour la ligne 26.

Elle appartient à T_{32} sans appartenir à T_{16}.

Le motif de la ligne 26 reproduit deux fois le motif de T_{16} situé 16 rangs au-dessus, à la ligne 10.

Cette ligne appartient à T_{16} sans appartenir à T_8

Le motif de la ligne 10 reproduit deux fois le motif de T_4 situé 8 rangs au-dessus, à la ligne 2.

A chaque opération de report, on retranche au n° de la ligne la plus grande puissance possible de 2, tout en doublant le nombre des éléments du nouveau motif.

Ces deux opérations sont très simples, si le n° est exprimé en code binaire. On barre le chiffre de gauche (1 naturellement) de ce n° autant de fois qu'il est nécessaire.

Ex. : 26 (en base DIX) = 1 1 0 1 0 (en base DEUX)

Pour arriver à la ligne zéro (un seul point) il faut barrer trois chiffres 1, donc procéder à 3 doublements successifs

$s(26) = 2^3 = 8$

D'une façon générale si r comporte t chiffres 1 dans son code binaire : $s(r) = 2^t$

ainsi si r = 7 = 111 en base DEUX
r = 11 = 1011
r = 14 = 1110
$s(r) = 8$

Nombre des points depuis la ligne 0 jusqu'à la ligne $r = 2^n$ exclue.

T_1 contient 3 points

T_2 $3\ T_1$ soit 3 x 3 points

....

T_{2^p} contient $3\ T_{2^{p-1}}$
donc 3^{p+1} points

Rapport du nombre des points au nombre total de places ou fréquence (pcur le triangle T_{2^p}).

Le nombre des places est la somme : $1 + 2 + 3 + ... + 2^{p+1}$.

Cette somme est :

$$\frac{1}{2}\, 2^{p+1}(2^{p+1}+1) = 2^p\,(2^{p+1}+1)$$

La fréquence cherchée est donc :

$$\frac{3^{p+1}}{2^p(2^{p+1}+1)} = \frac{2}{\left(\frac{4}{3}\right)^{p+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1}}$$

Lorsque

$$p \to \infty : \left(\frac{4}{3}\right)^{p+1} \to \infty, \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1} \to 0$$

la fréquence tend donc vers 0.

Le « triangle » des points est de plus en plus lacunaire lorsqu'il s'étend.

Lorsqu'on étend indéfiniment le triangle de Pascal, le rapport du nombre des coefficients impairs au nombre total des coefficients tend vers zéro.

Etude des nombres lus en base DIX sur les lignes de la Fig. 2 :

Ces nombres sont : 1, 11, 101, 1111, ...

Les nombres de T_1 sont 1 et 11.

Les nombres de T_2, non encore écrits, s'obtiennent d'après la construction en multipliant par 101 les précédents ($101 = 10^2 + 1$)
on en est à : 1, 11, 101. 1111

Les nombres de T_4, non encore écrits, s'obtiennent en multipliant par 10001 les précédents
($10001 = 10^4 + 1$).

Chaque fois qu'on passe du triangle $T_{2^{p-1}}$ au triangle T_{2^p} par double répétition du motif, tout se passe comme si on multipliait les éléments de

$T_{2p} - 1$ par : $10^{2^p} + 1$.

L'ensemble des nombres lus en base DIX sur les lignes du triangle de Pascal modulo 2 est donc formé des termes du produit développé :

$(1 + 11)(1 + 101)(1 + 10001)$ ______

$[1 + (10^{2^p} + 1)]$

Etude des nombres lus en base DEUX sur les lignes de la Fig. 2 :

L'étude précédente peut être faite dans toutes les bases de numération a. 101 devient : $a^2 + 1$.

Un lecteur suédois, Per Häggmark, de la revue anglaise « The Mathematical Gazette » a remarqué que les nombres lus en base DEUX :

1 1		soit 3
1 0 1		5
1 0 0 1		17 en base DIX
etc		etc

sont des nombres de Fermat (on appelle ainsi les nombres $2^{2^p} + 1$)

On a longtemps pensé qu'ils étaient tous premiers comme :

$2^{2^3} + 1 = 257$; $2^{2^4} + 1 = 65537$

Le terme suivant :

$2^{2^5} + 1$ n'est pas premier.

Pascal et Fermat se rencontrent donc sur ce terrain. Pourquoi Gauss les a-t-il rejoints ? (sur notre dessin)

Il a montré que les seuls polygones réguliers que l'on peut inscrire dans un cercle au moyen de la règle et du compas sont, lorsque le nombre n des côtés est impair, ceux pour lesquels :

n = 3, 5, 17, 257, 65537 ..

et les produits entre eux de ces facteurs premiers mais non de leurs puissances.

[Le signe typographique .. anormal, emprunté à Françoise Sagan ! traduit l'ignorance de l'auteur - peut-être faut-il étendre la liste aux nombres $2^{2^p} + 1$ qui sont premiers ? -] (voir remarque 2)

Les valeurs de n permettant la construction sont les termes du produit développé :

$(1 + 3)$ $(1 + 5)$ $(1 + 17)$ $(1 + 257)$ $1 + 65537)$ hormis 1

On trouvera le côté du polygone régulier C_{85} de 85 côtés inscrit dans le cercle de rayon R à partir de C_5 et de C_{17} supposés connus.

Remarque 1 : Un de nos lecteurs, M.-J. Kuntzmann, a trouvé la condition suivante pour que le coefficient C_n^p de la formule de Newton (c'est notre problème) soit impair : L'addition en base DEUX de p et de (n — p) se fait sans retenue, si $C_n^p \equiv 1$.

en 1 $C_{22}^{13} \equiv 0$; $\begin{array}{r} 13 \rightarrow 1101 \\ 9 \rightarrow \underline{1001} \end{array}$

en 2 $C_3^2 \equiv 1$; $\begin{array}{r} 2 \rightarrow 10 \\ 1 \rightarrow \underline{1} \end{array}$

Remarque 2 : Dans le n° 315 du bulletin de l'Association des professeurs de mathématiques, J.-C. Carrega répond victorieusement à la question, en signalant qu'on ne connaît pas, pour l'instant, de nombres de Fermat $(2^{2^p} + 1)$ premiers et supérieurs à 65537.

TRIANGLES DE FERMAT
(d'après Mathesis 1947, p, 5)

On appelle triangles de Pythagore les triangles de côtés a, b, c tels que $a^2 = b^2 + c^2$ (a, b, c étant entiers) on peut appeler triangles de Fermat ceux pour lesquels

$$a^n = b^n + c^n \; (n \in N \; ; \; n > 2)$$

on sait que a, b, c ne peuvent être tous rationnels.

Ex. : $12^3 = (9 + \sqrt{5})^3 + (9 - \sqrt{5})^3$ (1)

vérifier :

1° l'exactitude de cette égalité

2° que 12, $9 + \sqrt{5}$, $9 - \sqrt{5}$ sont les côtés d'un triangle.

Plus généralement utiliser les identités suivantes (identités pour des valeurs convenables à déterminer de A, B, C) pour former des triangles de Fermat.

$(2\,rs)^3 = (r^2 + \sqrt{A})^3 + (r^2 - \sqrt{A})^3$ (2)

$(2\,rs)^4 = (r^2 + \sqrt{B})^4 + (r^2 - \sqrt{B})^4$ (3)

$(2\,rs)^5 = (r^2 + \sqrt{C})^5 + (r^2 - \sqrt{C})^5$ (4)

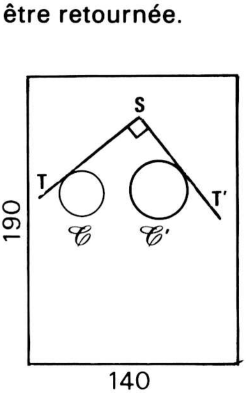
on calculera A, B, C en fonction de r et de s, supposés positifs.

DES EXPERIENCES D'ABORD : LE LIMAÇON DE PASCAL

On va construire le plus exactement possible une courbe remarquable. On s'apercevra qu'on peut en donner une définition très simple.

Dans un cadre 140 x 190 (unité : le mm), on place les points O (x = 23 ; y = 110) et O' (x = 88 ; y = 110) centres respectifs des cercles $\mathscr{C}$ (r = 15 mm) et $\mathscr{C}'$ (r' = 36 mm).

On pose une équerre TST' sur le plan comme l'indique la figure. L'équerre glisse sur le plan [ST restant tangente à ($\mathscr{C}$) et ST' à ($\mathscr{C}'$)] sans pouvoir être retournée.



Tracer point par point la courbe décrite par le point S, sommet de l'angle droit.

Si on imagine une deuxième équerre OVO' déduite de la première par translation, on peut aisément montrer :

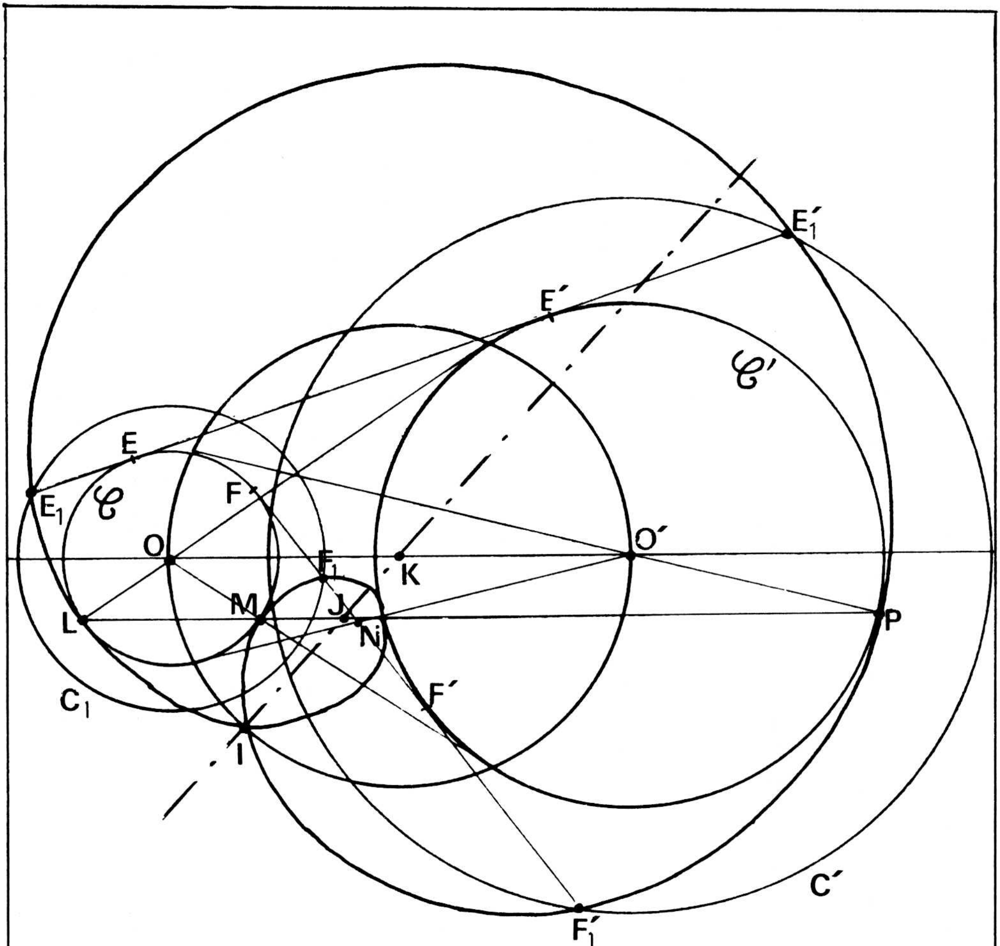
1°) que les bords des deux équerres déterminent un rectangle dont SV est une diagonale et qui reste égal à lui-même,

2°) que l'ensemble des points V est le cercle de diamètre OO',

3°) que la droite SV recoupe ce cercle en un point fixe i,

4°) que la courbe est obtenue en portant sur les sécantes IV au cercle de diamètre OO' de part et d'autre de V une longueur $VS = \sqrt{r^2 + r'^2}$.

On appelle une telle courbe une « conchoïde » de cercle (conque : coquillage). Celle-ci étudiée par Pascal (1623-1662) a été par lui appelée LIMAÇON.



Limaçon de PASCAL

L'ENVOI A DAME

Vous avez maintenant compris la conception et la réalisation d'un coup sur le damier : bien souvent, pour ne pas dire toujours, il faut étudier la possibilité d'offrir successivement plusieurs pions avant de parvenir à la prise finale.

Parfois il semble cependant impossible d'amener un pion adverse jusqu'à la case fatidique qui permet d'effectuer cette rafle car aucun pion ennemi ne se trouve dans les environs immédiats de cette case. Ainsi, dans la position du **diagramme B**, on se rend compte très facilement que si les Blancs parvenaient à amener un pion noir à la case 21, ils réaliseraient alors la rafle 26 x 17 x 8 x 19 x 10, prenant ainsi 4 pions d'un seul coup. Mais comment amener une pièce à la case 21 ? Dans ce cas précis il n'existe qu'une seule solution, celle qui semble la plus absurde puisque les Blancs vont envoyer les Noirs à dame ! Pour cela les Blancs donnent un pion par 49-44 ; les Noirs sont obligés de prendre ce pion et d'aller à dame par 40 x 49 puis les Blancs continuent par 32-27. La dame noire doit alors prendre 49 x 21 et le pion blanc 26 prend non seulement cette dame mais aussi les trois pions noirs, gagnant ainsi la partie par 26 x 10.

Sur le **diagramme C** nous vous proposons un autre exemple qui permet d'appliquer le même principe : les Blancs vont amener un pion noir à dame et cette dame va précisément leur permettre de réaliser un coup. Les Noirs semblent trop loin de la ligne damante 46-50 ? Qu'importe, examinez bien tous les points de contact...

Même principe avec le **diagramme D** : il faudra néanmoins crever la ligne des noirs par l'offre d'un pion supplémentaire.

Si vous avez assimilé le mécanisme de l'envoi à dame, passons à des choses un peu plus difficiles, par exemple à un envoi à dame en début de partie, à 20 pions contre 20.

Vous installez vos 40 pions sur le damier et vous jouez le début suivant :

1 - 31-26 (19-23) 2 - 37-31 (14-19)
3 - 41-37 (10-14) 4 - 46-41 (5-10)
5 - 33-29 (20-25) 6 - 39-33 (14-20)

On obtient ainsi la position du **diagramme E** et on peut réaliser le célèbre coup Van Berghen, qui a fait pas mal de dégâts dans les compétitions depuis quelques dizaines d'années. Ce coup se divise en 3 étapes :

1° les Blancs envoient les Noirs à dame

2° les Blancs vont à dame

3° les Blancs prennent la dame Noire

Progressons dans la difficulté avec deux « super-envois à dame » qui constituent la clef de la solution des deux problèmes qui ont remporté le Concours International de Problèmes 1982.

Le **diagramme F** présente le premier prix, un problème du maître POST, de Lyon : les Blancs jouent et gagnent en 9 coups !

Le second prix se trouve sur le **diagrame G** : dans ce problème de Repetto, les Blancs jouent et gagnent en 8 coups, en utilisant, bien entendu, un envoi à dame...

Si la tête vous tourne, reportez-vous à la page n° **35** pour les solutions.

Gérard FONTIER

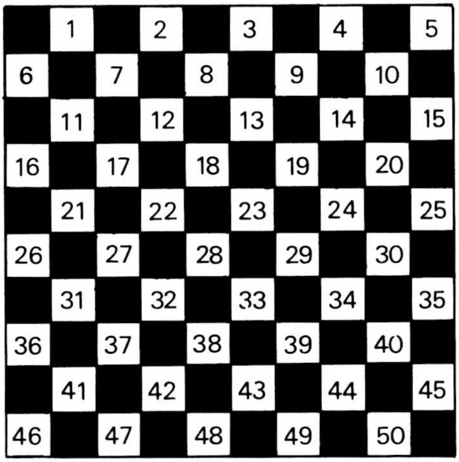


Diagramme A - Numérotation du Damier

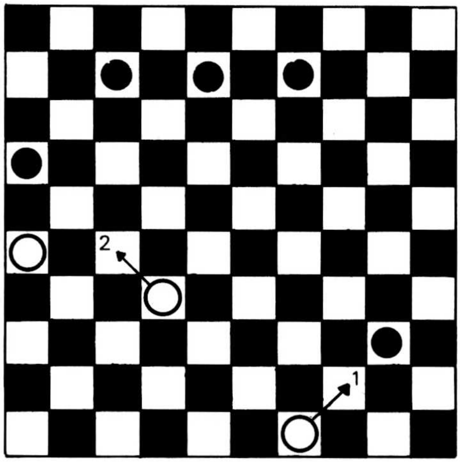
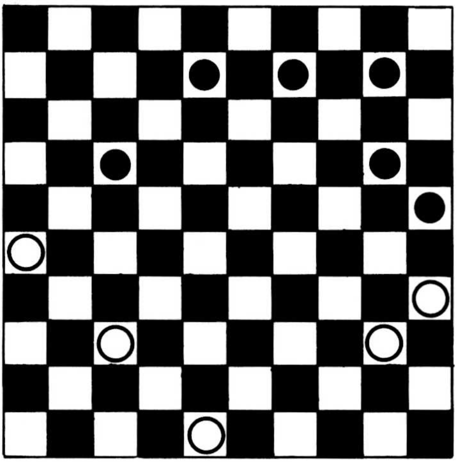


Diagramme B - Mécanisme du gain par envoi à dame



Diagrame C - Les Blancs jouent et gagnent en 5 coups par envoi à dame

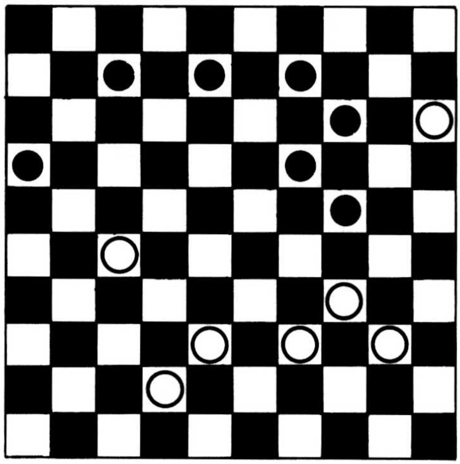


Diagramme D - Les Blancs jouent et gagnent en 5 coups

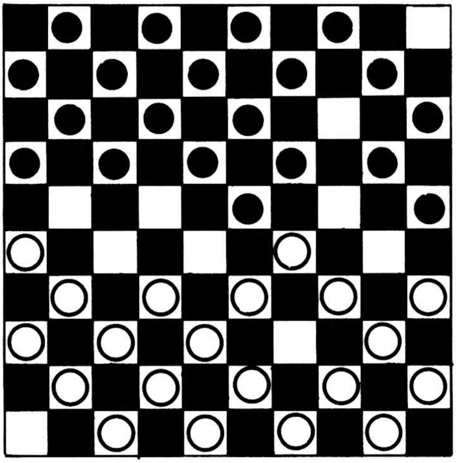


Diagramme E - Coup Van Berghen. Les blancs jouent et dament en 7 coups

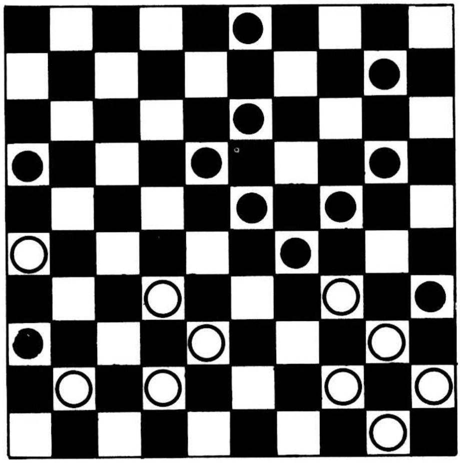


Diagramme F - Les Blancs jouent et gagnent en 9 coups, par le maître POST

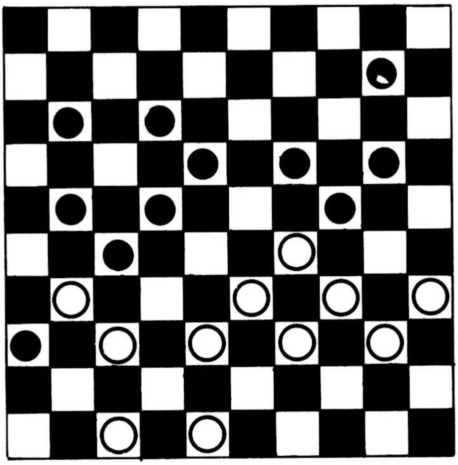
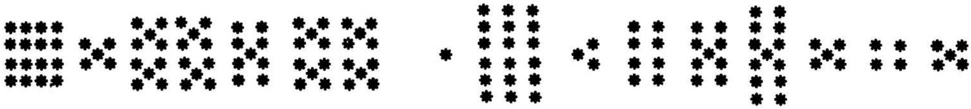


Diagramme G - Les Blancs jouent et gagnent en 8 coups, par Repetto

MESSAGE A DECHIFFRER



Le nombre de points de chaque signe est le rang dans l'alphabet de la lettre correspondante d'où : PETIT ARCHIMÈDE

ETAT CIVIL (N. P.A. 84-85, p. 26)

Du nouveau chez les -TIQUES

Le 22 juillet de l'an 1982, M. Jean-Pierre Chevènement proposa de nommer PRODUCTIQUE une discipline nouvelle située au carrefour de la robotique, de l'informatique et de la mécanique.

Le P.A. lui souhaite belle et longue carrière, en la mettant en garde contre le grand méchant loup, qui cherchera à la dévorer, comme dans la triste histoire du Petit Chaperon Rouge, après s'être déguisée récemment en la BUREAUCRATIQUE.

lisez :

log mécan phys	IQUE	mathéma téléma informa robo intellec bureaucra produc	T-IQUE

bureau-TIQUE

Peut-on dire que la bande des -TIQUES est en train de « dégommer » celle des -IQUES ?

LES DIVISIONS DU JOUR

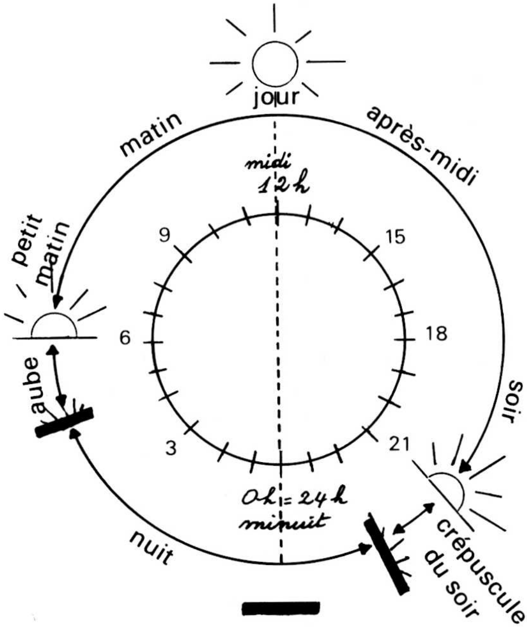
EN FRANÇAIS usuel la vie se règle, **grosso modo,** sur le soleil.

EN BAMBARA, nous rapporte notre ami soudanais Moussa, sur les moments de prière (que l'on soit croyant ou non) :

matin	**Fajiri**	5 h 30< <6 h
après-midi	**Selifana**	≃ 15 h
	Lakansara	≃ 16 h
	Fitiri	18 h 30< <19 h
avant de se coucher	**Safo**	≃ 20 h

à condition d'avoir une montre

On ne dit pas « il est 5 h 30 ou 6 h », mais « Fajiri est là » !

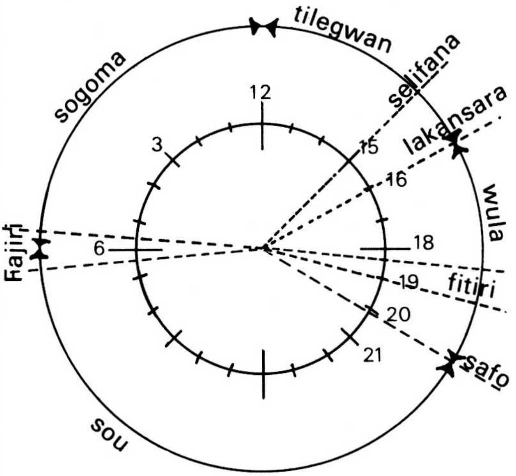


Pour saluer on dit :

ini sogoma	5 h 30<	<12 h
ini tilé	12 h<	<16 h
ini wula	16 h<	<18 h 30
ini sou	19 h<	<5 h 30

Traduisez en bambara : bon jour,
bon soir,
bonne nuit,

Sans aller aussi loin, comparez le français à l'anglais, l'allemand, l'espagnol, l'italien ... le russe ...



VERBE SANS VOIX !

Notre amie Claude nous écrit : Ça va sans dire...

MANGER et ÊTRE MANGÉ, ce n'est pas la même chose...

En français, en anglais et dans bien des langues qui nous sont familières, tu es obligé de choisir entre l'actif **il mange,** donc **il** fait l'opération, et le passif **il est mangé,** où **il** subit l'opération.

N'est-ce pas évident ? Et pourtant, il y a des langues qui se servent du même mot pour exprimer ces deux idées (par exemple, la langue parlée dans l'archipel des Tongas, Pacifique Sud). Voici comment cela se passe : en tongien, si tu vois un poulet picorer dans une basse cour, tu peux dire :

'oku	**kai**	**'ae moa'**
↓	↓	↓
Temps présent	verbe	le poulet

≃ « Le poulet mange »

Mais si tu es dans la cuisine et si tu vois le poulet dans une assiette, tu as très faim, tu t'attables et tu manges, tu peux aussi employer la même phrase (si tu veux décrire ce qui arrive au poulet) **'oku kai 'ae moa',** et là, cette phrase sert à exprimer l'idée que le « le poulet est mangé ».

Comment est-ce possible ? Comment la même phrase peut-elle exprimer deux idées radicalement opposées ? Eh bien, en fait, le verbe **kai** tout seul ne signifie ni « manger » ni « être mangé », mais seulement le commun dénominateur de ces deux traductions en français, en d'autres termes, il signifie « manger-être mangé » **moins la voix.** Cette notion nous est difficile à imaginer en français ; pour l'exprimer, il nous faut sortir du système verbal et dire, par exemple, quelque chose comme : « **il** est impliqué dans une opération de prise de nourriture »*.

Bon, tout ça, c'est très bien, mais ça ne nous explique toujours pas quand le verbe **kai** en tongien signifie « manger » et quand « être mangé ». Eh bien, c'est la situation qui le complète : dans cette langue (et dans beaucoup d'autres, comme l'avar au Caucase, le Houaïlou en Nouvelle Calédonie - pas très loin de Tonga -, le birman en Asie, etc...), si on voit le poulet manger ou si on le voit être mangé, qu'il est agent ou victime de l'opération suivant le cas, cela va sans dire* ; si ça va sans dire, ce n'est vraiment pas la peine de le dire quand-même... On dit alors, en termes savants, que le verbe tongien ne présente pas de diathèse (voix) actif-passif.

Mais si tu y regardes de plus près, tu vois que la situation - ou la vraisemblance - intervient souvent dans ce qu'on dit en français aussi. Mais en français ce sont les noms qui ne présentent pas la différence entre la voix active et la voix passive : si on parle de la pêche, par exemple, **la prise de Jean** veut dire les poissons qu'il a pris. Au contraire, **la prise du poisson** veut dire le poisson qu'il (ou quelqu'un d'autre) a pris.

En français, la diathèse est verbale et, généralement, pas nominale. En tongien, c'est le contraire. Le verbe n'a pas de voix, mais le nom peut en avoir. Mais ça, ô mieux aimé, comme disait Kipling, c'est une autre histoire...

* En français les verbes symétriques comme : casser, descendre, grossir, monter, noircir, etc., ont parfois un comportement comparable. « L'encre noircit », change-t-elle de couleur ou s'en sert-on comme colorant ?

UN LINGUISTIQUE PASSIONNE

Le linguistique russe du 19ème siècle, Philippe Ph. FORTUNATOV, grand spécialiste des langues indo-européennes et notamment des langues slaves, ne vivait que pour la linguistique historique et passait toutes ses vacances à fouiner dans les vieux grimoires.

Comme il revenait de Lituanie, il avait hâte de faire part à son collègue, économiste, de ses nouvelles découvertes ;

« J'ai connu un bonheur parfait. Grâce à l'obligeance des moines, j'ai pu m'enfermer tout l'été dans un un monastère et travailler deux mois durant sur d'anciens manuscrits lituaniens encore inexplorés... »

« Mais de quoi était-il question dans ces manuscrits ? » lui demanda son compagnon de route.

« Oh, je ne me souviens pas, cela a si peu d'importance... »

Seule la forme des mots l'intéressait.

LES ANIMAUX ESPERANTISTES FONT...

Courrier des Lecteurs. **Contribution au dictionnaire Cui Cui Ouah Ouah.** (P.A. n° 77-78, p. 19)

le chien	ùa
le chat	miaù
le mouton	be
le coq	kokeriko
le coucou	kuku
le dindon espérantiste fait	gluglu glu
l'oiseau	kvivit
l'âne	ia
le tetras	kluk
la grenouille	kvak
l'insecte	zum zum

Le P.A. en est tout retourné. Sans doute, les chats anglais, français, allemands ... nous font-ils tous **miaou,** mais tel n'est pas le cas de beaucoup d'autres animaux. Le coq anglais fait **cockle-doodle-doo,** la grenouille française **coa,** le chien russe **gaf,** les oiseaux italiens **cip-cip** (pron. tchip). Chaque langue interprète à sa façon les bruits et les cris, en fonction des sons qu'elle utilise normalement dans la parole.

Les transcriptions adoptées l'ont-elles été à la suite d'un vote démocratique des chats, chiens, coqs ... des divers pays ou y a-t-il impérialisme, colonisation ? Peut-être la décision vient-elle d'un conseil d'animaux experts, accrédités par quel jardin zoologique ? Vite une réponse. Le P.A. n'en dort plus !

DANSE DE LUTIN
(Accelerando, crescendo)

I

Dolce ; dolce
Yaâse folce
Dolce, dolce
Yoli, deline

II

Yulce, Yulce,
Youdouli dulce,
Yulce, yulce,
Kzill odaline

III

Jalce, jalce
Yahanti galce,
Jalce, jalce
Blouzi psiline

IV

Djilce, djile
hando bokjile
Djilce, djile
Yli zlideline.

V

(diminuendo, relentendo)
Vli Zlideline
Vli Zlideline
Djilce, djilce, djilce, djilce
Jalce, jalce, jalce, jalce,
Yulce ; yulce, yulce ;
Dolce, Dolce.
Yaâse folce...
Dolce.. Dolce..
Dolce
Question au lecteur : Est-ce vraiment du français ?

de François Dufrene

LES LANGUES DU MONDE

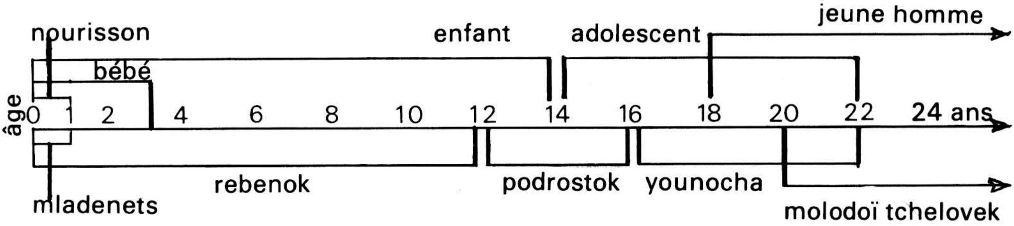
Un nom à chaque chose, certes !

Mais quand il s'agit d'un continu sans frontières évidentes, comment découper les parties ?

Chaque langue s'y prend à sa façon.

Le linguistique soviétique Vladimir Grigorievitch GAK* compare :

En **français** on a sensiblement :



en **russe** :

Les mots ne se correspondent pas biunivoquement.

Jeune homme en russe (20 < ...) et **jeune homme** en français (18 < ...) ce n'est pas le même **jeune homme.**

*** Lexicologie contrastive. Moscou 1977.**

CONSTRUCTION DE CARRES MAGIQUES
(suite)

Dans PA 84-85 et PA 90, on a étudié les cas de construction de carrés magiques quand l'ordre est impair ou multiple de 4.

3 - l'ordre est pair sans être multiple de 4

Ce cas est plus difficile que les précédents quand on ne se sert pas de la méthode à base mathématique plus ou moins masquée, mais toujours présente.

On utilise des numérations dont la base est autre que DIX. Souvent la base est égale à l'ordre du carré : méthode de la Hire, méthode des «chevrons».Dans la méthode de Strachey, elle en diffère.

Bases de numération autres que DIX

Leur emploi est requis par le problème traité.

On rappelle qu'en base CINQ on utilise cinq chiffres : 0, 1, 2, 3, 4. En base VINGT-CINQ il y en a vingt-cinq, notés 0, 1, 2,..., (10), (11), ..., (19), (20),..., (24)

(19) lu « dix-neuf » est ici un symbole comptant pour un seul chiffre.

(34) (base cinq) = 3 bases + 4 unités = 5 x 3 + 4 = 19 (base DIX)

3(19) (base VINGT-CINQ) = 3 bases + 19 unités = 25 x 3 + 19 = 94 (base DIX)

On analyse ici le carré d'ordre 4 déjà écrit

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

On diminue chaque nombre de 1 pour que l'expression en base QUATRE ne comporte que des nombres de deux chiffres.

0	14	13	3
11	5	6	8
7	9	10	4
12	2	1	15

on convertit en base QUATRE

00	32	31	03
23	11	12	20
13	21	22	10
30	02	01	33

On sépare les chiffres des bases et ceux des unités

BASES

0	3	3	0
2	1	1	2
1	2	2	1
3	0	0	3

UNITES

0	2	1	3
3	1	2	0
3	1	2	0
0	2	1	3

On aperçoit des correspondances simples dans chaque carré : symétrie des colonnes ou des lignes ; entre les deux carrés : échange des lignes ou des colonnes.

Dans ce qui va suivre, on utilisera la marche inverse :

1 - écriture des carrés des bases et des unités : tout est là
2 - superposition et regroupement
3 - conversion en base DIX.

Exemple d'application :

Soit le couple de carrés :

CARRE DES BASES

3	0	0	2	2	2
0	3	0	2	2	2
3	0	0	2	2	2
0	3	3	1	1	1
3	0	3	1	1	1
0	3	3	1	1	1

CARRE DES UNITES

5	6	1	5	6	1
0	4	8	0	4	8
7	2	3	7	2	3
5	6	1	5	6	1
0	4	8	0	4	8
7	2	3	7	2	3

Neuf chiffres sont utilisés, on travaille donc en base NEUF.

SUPERPOSITION (base neuf)

35	06	01	25	26	21
00	34	08	20	24	28
37	02	03	27	22	23
05	36	31	15	16	11
30	04	38	10	14	18
07	32	33	17	12	13

Est-il nécessaire de vérifier que le carré obtenu est magique ? Les carrés

CONVERSION EN BASE DIX

32	6	1	23	24	19
0	31	8	18	22	26
34	2	3	25	20	21
5	33	28	14	15	10
27	4	35	9	13	17
7	29	30	16	11	12

des bases et des unités le sont ; on se convaincra que c'est suffisant (si on n'a pas fait de faute de calcul).

Reste à préciser la formation du carré des bases et du carré des unités.

Méthode de la Hire

1 - On écrit d'abord l'un des carrés, le carré des unités par exemple

1° -les diagonales (fig a)

2° -dans toute colonne ne figurent que deux chiffres complémentaires à 5, l'un et l'autre trois fois.

dans la colonne où figurent deux 0, on en met un 3eme, où on veut, et trois 5

" 1 " 4

" 2 " 3

3° -pour remplir les trois colonnes de droite, tout est maintenant imposé : on place dans chaque case le complément à 5 du nombre qui figure dans la case symétrique par rapport à xy (fig c)

a

0					5
	1			4	
		2	3		
		2	3		
	1			4	
0					5

b

0	4	3			5
5	1	3		4	
0	4	2	3		
5	4	2	3		
5	1	2		4	
0	1	3			5

c

			x				
	0	4	3	2	1	5	
	5	1	3	2	4	0	
m	0	4	2	3	1	5	n
	5	4	2	3	1	0	
	5	1	2	3	4	0	
	0	1	3	2	4	5	
			y				

d

0					**0**
	1			**1**	
		2	**2**		
		3	**3**		
	4			**4**	
5					**5**

2- carré des bases

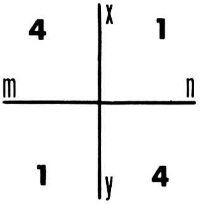
1° -les diagonales sont disposées autrement (figure d)

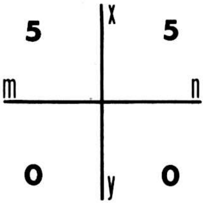
2° -dans toute ligne ne figurent que deux chiffres complémentaires à 5, l'un et l'autre trois fois ; la manière de remplir ces lignes dépend du carré précédent.

3° -on cherche à remplir la première ligne des chiffres de base

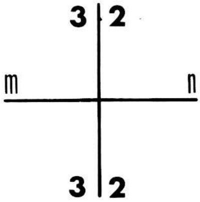
Les seuls chiffres possibles sont 0 une fois et 5 trois fois.

La case-unité qui contient le chiffre 4 est associée à ses symétriques par rapport à mn et à xy, toutes deux marquées du chiffre 1. Les chiffres de base liés à ces dernières cases sont donc différents. Si on choisit 5 pour le 1 de la 1ere ligne (unités) il faut mettre 0 pour le 1 de la dernière, 5 pour le 4 de la 1ereligne et 0 pour le 4 de la dernière.

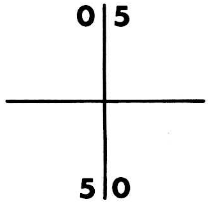




La case-unité qui contient le chiffre 3 est associée à la symétrique par rapport à mn marquée 3 aussi. Les chiffres de base liés à ces deux cases sont donc différents. Si on choisit 0 pour le 1er, on doit prendre 5 pour le 2eme.



unités



bases

On opère de même pour les lignes 2 et 3

Méthode de Strachey

L'ordre étant 6, 10, ... 4p + 2, sa moitié est un nombre impair.

1° -carré des unités : on le partage en 4 carrés égaux d'ordre 3, 5, ... 2p + 1 On remplit ces 4 carrés du même carré d'ordre impair qu'on sait construire

pour un carré d'ordre 6
base neuf

5	6	1	5	6	1
0	4	8	0	4	8
7	2	3	7	2	3
5	6	1	5	6	1
0	4	8	0	4	8
7	2	3	7	2	3

pour un carré d'ordre 10
base vingt-cinq

23	6	19	2	15	23	6	19	2	15
10	18	1	14	22	10	18	1	14	22
17	5	13	21	9	•	•	•	•	•
4	12	25	8	16					
11	24	7	20	3					
23	6	19	2	15	23	6	19	2	15
10	18	1	14	22	10	18	1	14	22
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

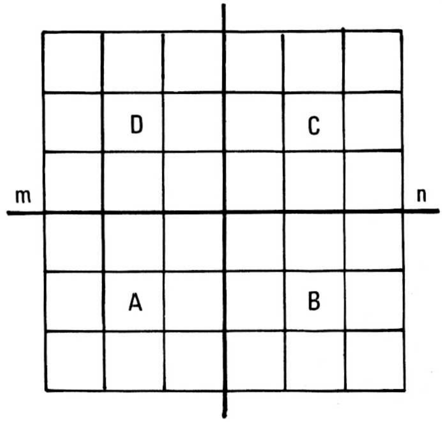
2° -Carré des bases
quatre chiffres identiques du carré des unités (comme les 5 par exemple) doivent être associés à des chiffres de base différents.

On opère dans un système de numération dont la base est le nombre des éléments d'un des petits carrés : base NEUF pour le carré d'ordre 6 ; base VINGT-CINQ pour le carré d'ordre 10

Les seuls chiffres de base utiles sont 0, 1, 2, 3.
On explique d'abord le cas du carré d'ordre 6.
On partage le carré des bases en 4 petits carrés A B C D

On remplit le carré B de chiffres 1, C de chiffres 2
Il faut que le carré des bases soit magique, la somme magique étant :

$$\frac{(0+1+2+3)\times 9}{6} = 9$$



Il faut donc que dans chaque ligne de D il y ait un trois et deux 0.

Il faut que dans la diagonale descendante de D associée aux trois 1 de la diagonale descendante de B il y ait deux 3 et un 0
d'où le carré des bases complété en A par «symétrie complémentaire» (les nombres correspondant à deux cases symétriques par rapport à mn ont pour somme 3)

carré des bases

3	0	0	2	2	2
0	3	0	2	2	2
3	0	0	2	2	2
0	3	3	1	1	1
3	0	3	1	1	1
0	3	3	1	1	1

carré des unités (rappel)

5	6	1	5	6	1
0	4	8	0	4	8
7	2	3	7	2	3
5	6	1	5	6	1
0	4	8	0	4	8
7	2	3	7	2	3

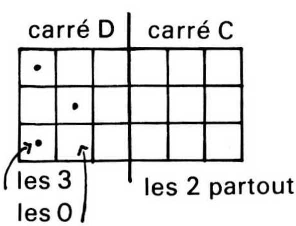
Resterait si on le désire à convertir en base dix

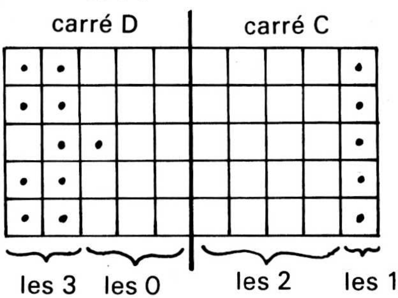
Cas du carré d'ordre dix (carré des bases)

Les chiffres 0, 1, 2, 3 sont ici encore en nombre égal, 25 de chaque sorte. La somme pour tout le carré est $(0 + 1 + 2 + 3) \times 25 = 150$.

La somme magique pour le carré des bases est donc 15

Sur toute ligne des carrés analogues à D et C on placera : deux 3 trois 0 quatre 2 et un 1 soit quinze en tout de même que sur la diagonale montante





carré complet en base NEUF

35	06	01	25	26	21
00	34	08	20	24	28
37	02	03	27	22	23
05	36	31	15	16	11
30	04	38	10	14	18
07	32	33	17	12	13

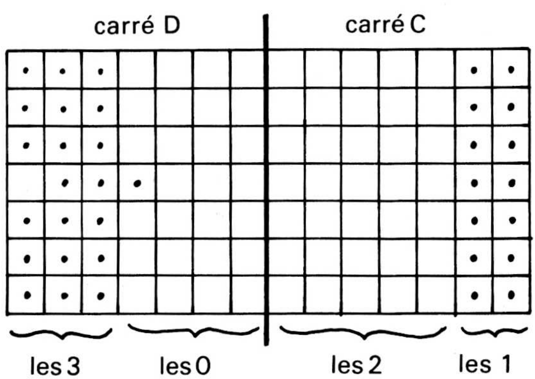
On complète par symétrie complémentaire

Cas du carré d'ordre $4n + 2$

Les chiffres 0, 1, 2, 3 sont dans le carré des bases chacun au nombre de $(2n + 1)^2$; la somme pour tout le carré est $(0 + 1 + 2 + 3) \times (2n + 1)^2$ et pour une ligne la somme, magique, est

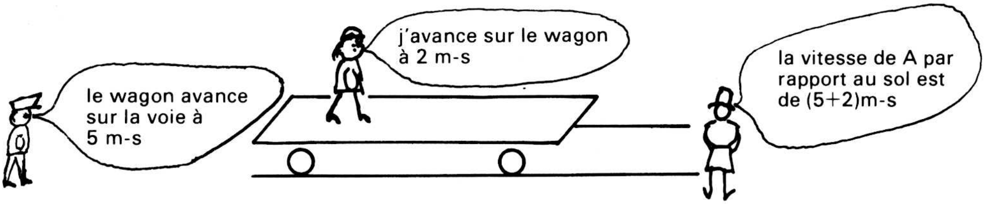
$$\frac{(1 + 2 + 3)(2n + 1)^2}{2(2n + 1)}$$

On peut donc trouver dans toute ligne des carrés analogues à D et à C n fois le chiffre 3, $(n + 2)$ fois le chiffre 2, $(n - 1)$ fois le chiffre 1, $(n + 1)$ fois le 0, de même dans la diagonale montante.



Les carrés A et B s'obtiennent par symétrie complémentaire *(à suivre)*

VITESSE de la LUMIERE



Depuis plus de cent ans, on sait que la loi d'addition des vitesses, qui nous semble si simple et si naturelle, ne s'applique pas aux mobiles dont la vitesse est peu différente de la vitesse de la lumière.

Avec Emile Borel, à qui nous empruntons un exemple, faisons semblant de croire le contraire.

Imaginons :

1 - ce qui est pour l'instant impossible, qu'on observe une planète d'une étoile, d'une étoile située à 2 500 années-lumière de la Terre.

2 - que la Terre soit dans le plan de l'orbite de cette planète.

3 - que la vitesse de la planète autour de son étoile soit de 30 km-s.

4 - que les durées de l'année pour la planète et pour la Terre soient de 360 jours (les calendriers étant identiques).

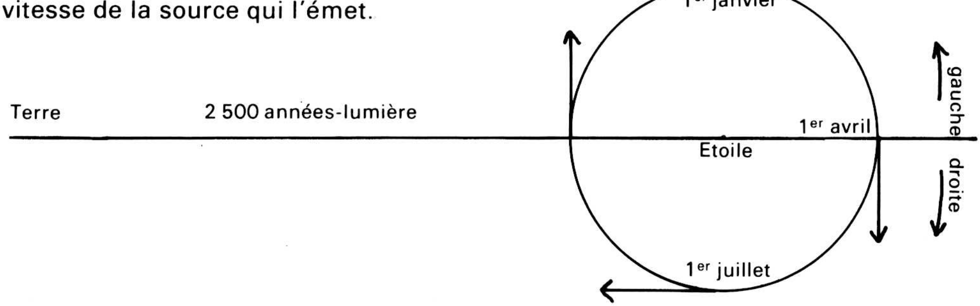
5 - enfin, et c'est le point le plus important, que la vitesse de la lumière s'ajoute (addition des vecteurs) à la vitesse de la source qui l'émet.

Raisonnons d'abord avec Emile Borel

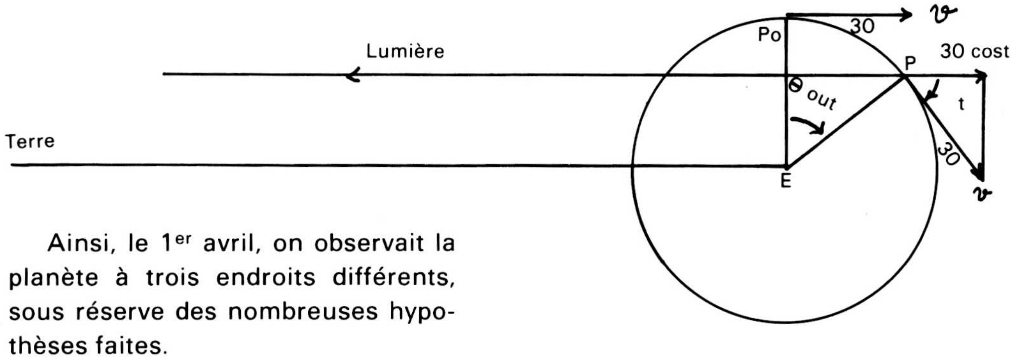
La vitesse de la lumière dans les conditions supposées est le 1^er^ janvier diminuée de 1/10000 de sa valeur. A un rien près, le temps de parcours est majoré de 1/10000, or 1/10000 de 2500 ans vaut 3 mois. La Terre reçoit donc le message le 1er avril seulement et voit la planète «à gauche» de l'étoile.

Le 1er avril, la lumière se propage vers la Terre à sa «vitesse propre» le message arrive donc à la Terre le 1er avril ; la planète est en face de l'étoile.

Le 1er juillet, part de la planète un message accéléré, vitesse augmentée de 1/10 000 de sa valeur, durée diminuée d'autant (à très peu près). Le message faisant voir la planète à droite arrive trois mois «trop tôt», donc le 1er avril.



1.1



Ainsi, le 1er avril, on observait la planète à trois endroits différents, sous réserve des nombreuses hypothèses faites.

Nous nous proposons d'étudier ce qu'on observerait à toutes les dates de l'année en reprenant le raisonnement et les hypothèses d'Emile Borel

Le rayon vecteur Etoile-Planète tourne d'un degré par jour $\widehat{E\,Po\,,\ E\,P} = t$ (si t est en jours la date dans l'année).

La vitesse de la lumière est modifiée de la composante de la vitesse de la planète sur cette vitesse de la lumière.

Le message s'en va vers la Terre à la vitesse de 300 000 km-s-30 cost km-s soit 300 000 (1 - cost/10 000) km-s

La durée du trajet est (sensiblement) multipliée par (1 + cost/10 000)

La date de l'arrivée s'obtient en ajoutant aux t jours qui séparent le 1er janvier de la date du départ la durée du trajet en années :
2 500 (1 + cost/10 000)

La date d'arrivée est donc :
2 500 (1 + cost/10 000) ans + t jours

2500 ans + 2500 x 360 x cost/10 000 jours + t jours

2500 ans + (t + 90 cost) jours

La date sur le calendrier est : t + 90 cost, en jours.

Traçons la courbe dont les points ont pour :

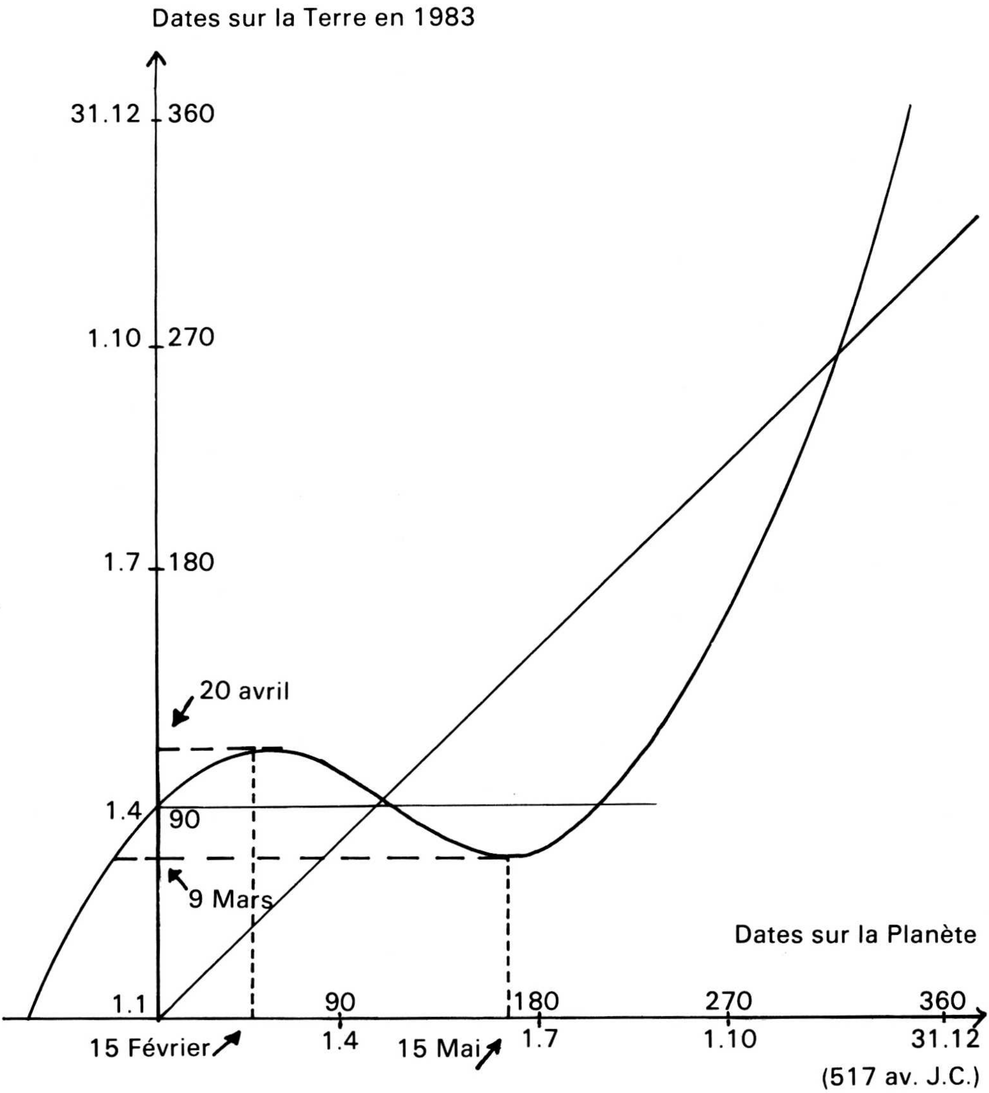
abscisse : la date du départ de la lumière (planète)
ordonnée : la date de l'arrivée sur la Terre

En coupant la courbe par la droite d'ordonnée 90, on retrouve les résultats de l'exemple donné par Emile Borel.

En coupant par une ordonnée variable nous allons décrire ce que nous observerions si notre hypothèse sur la lumière était exacte.

Du 1er janvier au 8 mars, rien d'anormal.

Le 9 mars, alors que la planète est à son 15 décembre apparaît la planète du 15 mai. Elle se dédouble: une des composantes de la planète continue dans le sens normal, l'autre part en sens inverse et le 15 février s'unit à la planète initialement vue puis s'évanouit avec elle (20 avril de la Terre).



Ne reste visible que la composante qui allait dans le sens normal. Elle est visible seule jusqu'au 9 Mars de l'année suivante !

Le lecteur aura remarqué l'emploi du présent de l'indicatif au lieu du conditionnel qui s'imposait, puisqu'on ne peut rien observer d'analogue à ce qui est «décrit».

Il aura une raison de plus de penser que la vitesse de la lumière ne dépend pas des observateurs en mouvements relatifs et uniformes.

*

LE RUBAN DE MOEBIUS

Soit une bande de papier rectangulaire (2 cm x 20 cm par exemple)

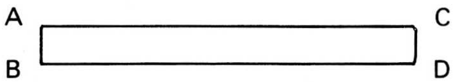


fig. 1

Coller bord à bord AB et CD donne un cylindre (un collier).

Il est plus amusant de coller bord à bord AB et DC, en faisant subir une torsion de 180° à la bande.

Le ruban obtenu (ruban de Moëbius) est singulier.

Combien possède-t-il de faces ? (la feuille initiale a deux faces).

Pour le savoir, on colorie en rouge à partir d'une certaine région et on continue...

Combien ce ruban possède-t-il de **bords ? (la feuille initiale a deux bords).**

A vos ciseaux ! Essayez de couper cette bande en suivant le pointillé correspondant au grand axe du rectangle (fig. 2)

Quel objet obtenez-vous ? Combien de faces ? Combien de bords ?

Recoupez encore encore de la même façon.

Et si vous découpiez à partir du tiers de la largeur ?

Et si vous découpiez à partir du quart de la largeur ?

Et si vous découpiez à partir du cinquième de la largeur ?

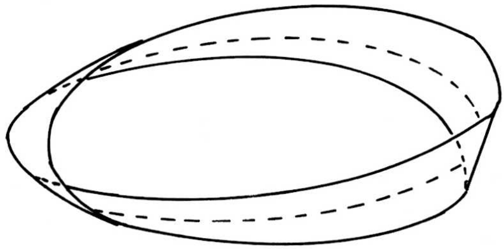


fig. 2

PA vous propose maintenant un jeu topologico-littéraire.

Voici deux quatrains dus à Luc Etienne qui nous a autorisé à les reproduire. Ils sont extraits de OULIPO «la littérature potentielle» Gallimard / Idées.

Le sens du poème diffère selon qu'ils sont lus l'un après l'autre ou réunis.

I

Trimer, trimer sans cesse,
Pour moi, c'est la sagesse,
Je ne puis flemmarder
Car j'aime mon métier...

II

c'est vraiment éreintant
de gaspiller son temps,
et grande est ma souffrance
quand je suis en vacances.

III Trimer, trimer sans cesse, c'est vraiment éreintant
Pour moi, c'est la sagesse de gaspiller son temps
Je ne puis flemmarder, et grande est ma souffrance,
Car j'aime mon métier... quand je suis en vacances.

Le ruban de Moebius nous permet d'écrire séparément les deux quatrains et de les réunir.

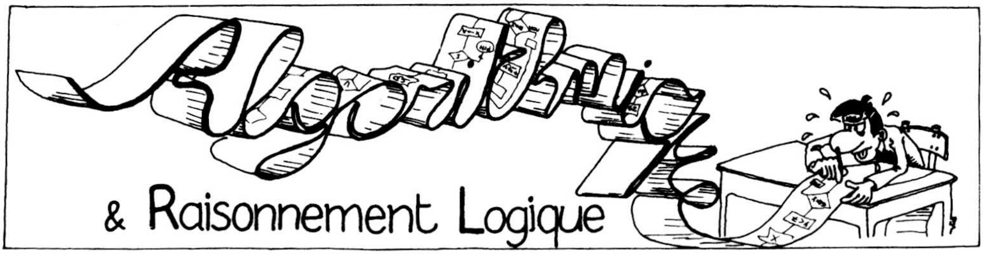
Découpez dans une feuille de papier quadrillé (maille 0,5 cm x 0,5 cm) une bande de largeur 2,5 cm aussi longue que possible.

Ecrivez le premier quatrain en fin de bande sur quatre lignes.

trimer, trimer sans cesse
..... sagesse
..... flemmarder
..... métier

Formez le ruban de Moebius sans le coller pour voir où pourront être écrits les quatre vers du deuxième quatrain.

Ecrivez ces vers et collez le ruban.



Problème ARL 91-1 - Un 421 bien particulier

Proposé par M. VIDIANI :

$\forall \mu_0 \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\mu_{n+1} = \begin{cases} 3\mu_n + 1 & \text{si } \mu_n \text{ impair} \\ \mu_n/2 & \text{si } \mu_n \text{ pair} \end{cases}$$

Alors, à partir d'un certain rang N, on trouve la prériodicité $\mu_N = 4, \mu_{N+1} = 2, \mu_{N+2} = 1$, $\mu_{N+3} = 4$, $\mu_{N+4} = 2$, $\mu_{N+5} = 1$, etc...

Pourquoi ?

Problème ARL 91-2 - Pyramide de nombres

Rappelé par M. OZOG (pb de HUGUETTO paru dans P.A. 71)

Trouver toutes les pyramides ayant une base de n nombres, et comportant tous les nombres de 1 à $N = \frac{n(n+1)}{2}$. Chaque nombre de la pyramide (sauf ceux de la base) doit s'obtenir par soustraction des 2 nombres de la ligne inférieure.

Ex. :

```
    2
  5   3
6   1   4
```

Solution ARL 84

Rappel du problème :
La phrase inscrite ci-dessous est évidemment correcte :

Dans ce cadre, il y a 1 fois le chiffre 0 2 fois le chiffre 1 3 fois le chiffre 2 2 fois le chiffre 3

Compléter de la même façon :

Dans ce cadre, il y a ... fois le chiffre 0 ... fois le chiffre 1 ... fois le chiffre 2 ... fois le chiffre 3 ... fois le chiffre 4 ... fois le chiffre 5 ... fois le chiffre 6 ... fois le chiffre 7 ... fois le chiffre 8 ... fois le chiffre 9

Il y a 2 solutions A et B à ce problème. Mais il y a aussi des solutions-gags du style de la C :

A	B	C	
1	1	1	x 0
7	11	2 x 2 x 2	x 1
3	2	2 x 3	x 2
2	1	2	x 3
1	1	1	x 4
1	1	1	x 5
1	1	1	x 6
2	1	1	x 7
1	1	1	x 8
1	1	1	x 9

Vous avez été nombreux à nous envoyer les deux solutions d'ARL 84. Mais hélas, aucun ne nous a joint de démonstration. Si vous en avez une courte, écrivez-nous, et nous la publierons !

Compléments ARL 68-1

Quels sont les plus petits $z \in N$ dont le carré est décomposable en n sommes différentes de deux carrés non nuls ?

Ce problème avait été résolu par M. EXCOFFIER dans le P.A. 86... mais sans démonstration complète. Or nous avons reçu une intéressante lettre de M. Jean MEUDEC de Morlaix retrouvant les mêmes résultats que M. EXCOFFIER avec une excellente démonstration hélas trop longue pour passer ici.

Le point de départ de son analyse est constitué par le théorème de Fermat indiquant que les nombres premiers de la forme $(4k + 1)$ peuvent être décomposés en une somme de deux carrés, premiers entre eux, et d'une seule manière.

Quant à trouver quelles sont ces décompositions en somme de 2 carrés, il suffisait d'employer intelligemment les complexes et leurs conjugués.

Ainsi, pour trouver les 7 façons de décomposer 325^2, il suffit de poser :

$$325^2 = 5^4 \times 13^2$$
$$= (4+1)^4 \times (9+4)^2$$
$$= (2+i)^4 (2-i)^4 (3+2i)^2 (3-2i)^2$$

En séparant de toutes les manières possibles ce produit en un produit d'un complexe avec sa quantité conjuguée, on trouvera toutes les solutions. Par exemple :

$$325^2 = [(2 + i)^4 (3 + 2i)^2] \text{ [conjugué]}$$

$$= [(-7 + 24i)(5 + 12i)] \text{ [conjugué]}$$

$$= [(-323 + 36i)] \text{ [conjugué]}$$

$$= 323^2 + 36^2$$

ou encore :

$$325^2 = [(2 + i)^2 (2 - i)^2 (3 - 2i)^2] \text{ [conjugué]}$$

$$= [25 \times (5 - 12i)] \text{ [conjugué]}$$

$$= [(125 - 300i)] \text{ [conjugué]}$$

$$= 125^2 + 300^2$$

Et ainsi de suite. On retrouvera les 7 façons :

$$\begin{aligned} 325^2 = \; & 36^2 + 323^2 \\ & 80^2 + 315^2 \\ & 91^2 + 312^2 \\ & 125^2 + 300^2 \\ & 165^2 + 280^2 \\ & 195^2 + 260^2 \\ & 204^2 + 253^2 \end{aligned}$$

Envoyez votre courrier concernant cette rubrique à :

Christian BOYER
Le Petit Archimède - ARL
B.P. 0222
80002 AMIENS CEDEX

Il est attendu avec intérêt et sera lu avec attention.

Un dé à quatre faces

Sur un pavage du plan en triangles équilatéraux on marque les triangles de centres S T U V, triangles notés respectivement 1, 2, 3, 4.

Un dé, tétraèdre régulier a sa face marquée 1 sur le triangle 1. En basculant autour de ses arêtes sa face 2 vient couvrir le triangle 2, sa face 3 le triangle 3, et sa face 4 le triangle 4.

En faisant basculer le dé comme il a été dit, on couvre successivement les triangles du pavage qu'on marque du n° de la face qui les touche. On remarquera que ce n° est indépendant du parcours du dé depuis l'origine.

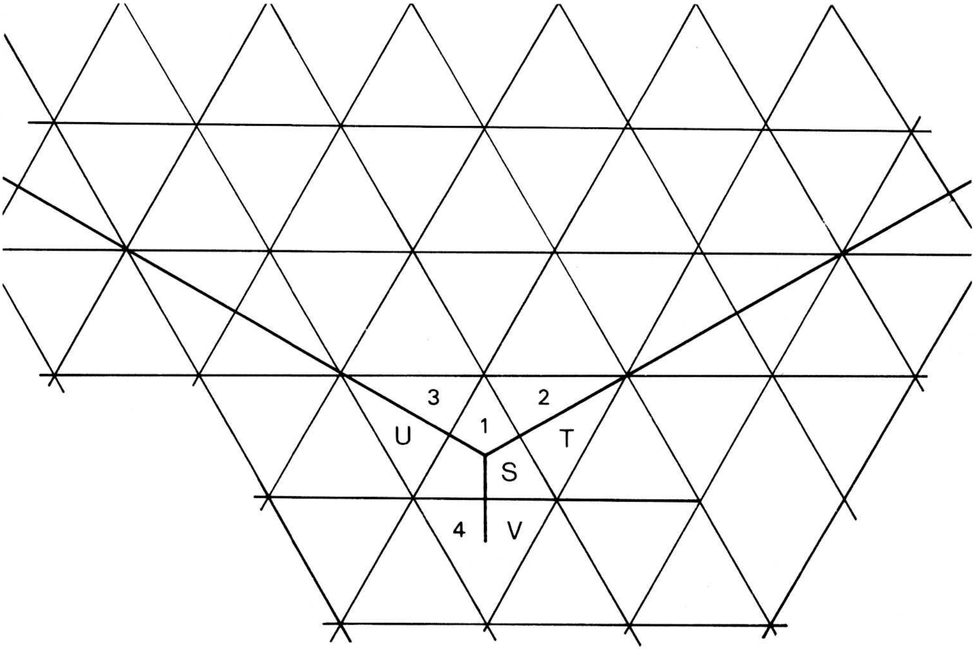
On repère le centre d'une face dans le système $\overrightarrow{SX}$, $\overrightarrow{SY}$. $\overrightarrow{ST}$ est le vecteur unitaire de l'axe $\overrightarrow{SX}$, $\overrightarrow{SU}$ celui de l'axe $\overrightarrow{SY}$

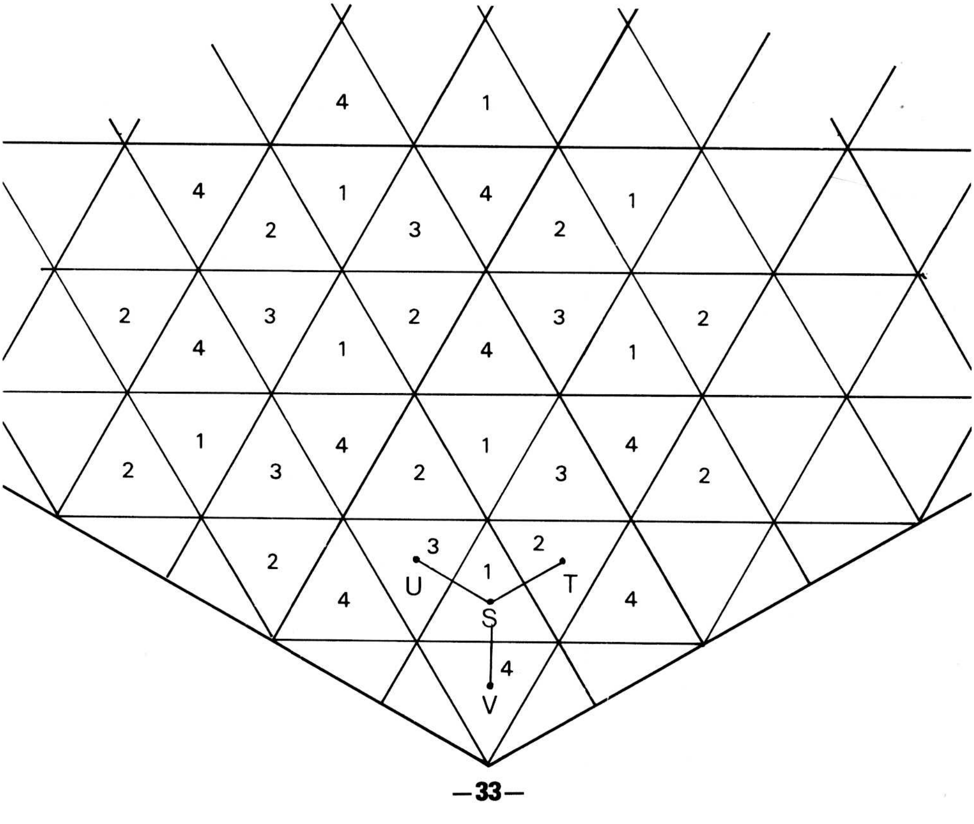
1 - Exprimer au moyen de paramètres les coordonnées des centres des faces 1, des faces 2, des faces 3 et des faces 4.

2 - On considère les symétries de directions t, u, v respectivement médiatrices de ST, SU, SV et la transformation identique i

- dresser la table des images de 1, 2, 3, 4 par i, t, u, v
- quelle est l'image de 2 par (touotovouo vouotouot) ? (1)

(1) N.D.R.L. Le lecteur comprendra qu'il s'agit ici d'une composition (o) des trois symétries.


3
2
1
U
T
S
4
V


4
1
4
1
4
1
2
3
2
2
3
2
3
2
4
1
4
1
1
4
1
4
2
3
2
3
2
3
2
1
U
T
S
4
4
4
V

Y A UN TRUC !

Voici un truc inventé il y a bien longtemps, remis en mémoire par une émission de télévision il y a quelques années :

A devine quel jeton est caché.

A pose sur la table devant B des jetons présentant deux faces différentes, (des dominos conviennent parfaitement). Les uns ont leur face blanche au dessus, les autres leur face noire.

Ces jetons sont étalés au vu de tous.

A s'éloigne, et ne voit plus ni la table, ni B.

B retourne alors des jetons, autant qu'il le désire, plusieurs fois le même s'il en a envie, mais, à chaque retournement, annonce à A «je retourne».

Il cache ensuite sous sa main un jeton et appelle A.

A revient, examine les jetons sur la table et annonce à B quelle est la face supérieure du jeton encore caché.

Y A VRAIMENT UN TRUC !

SOLUTION

1 - Un nombre pair de retournements ne change pas la parité du nombre de jetons blancs. Si celle-ci est finalement changée, c'est qu'on a caché un jeton blanc.

Un nombre impair de retournements change la parité du nombre de jetons blancs.

Si celle-ci est finalement changée, c'est qu'on a caché un jeton noir.

Si elle ne l'est pas, c'est qu'il s'agit d'un jeton blanc.

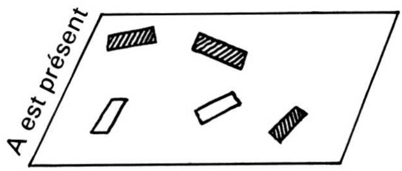
2 - Autrement

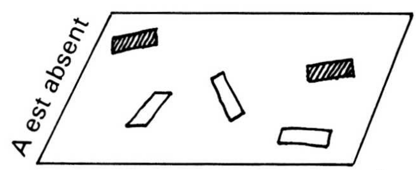
On attache le nombre 0 aux nombres pairs le nombre 1 aux nombres impairs parmi :

- le nombre des retournements,
- le nombre des jetons blancs visibles avant que A parte,
- le nombre des jetons blancs visibles à son retour,

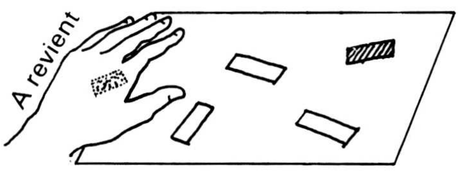
Si la somme des trois nombres est 0 ou 2 le jeton caché est noir

Si la somme des trois nombres est 1 ou 3 le jeton caché est blanc.



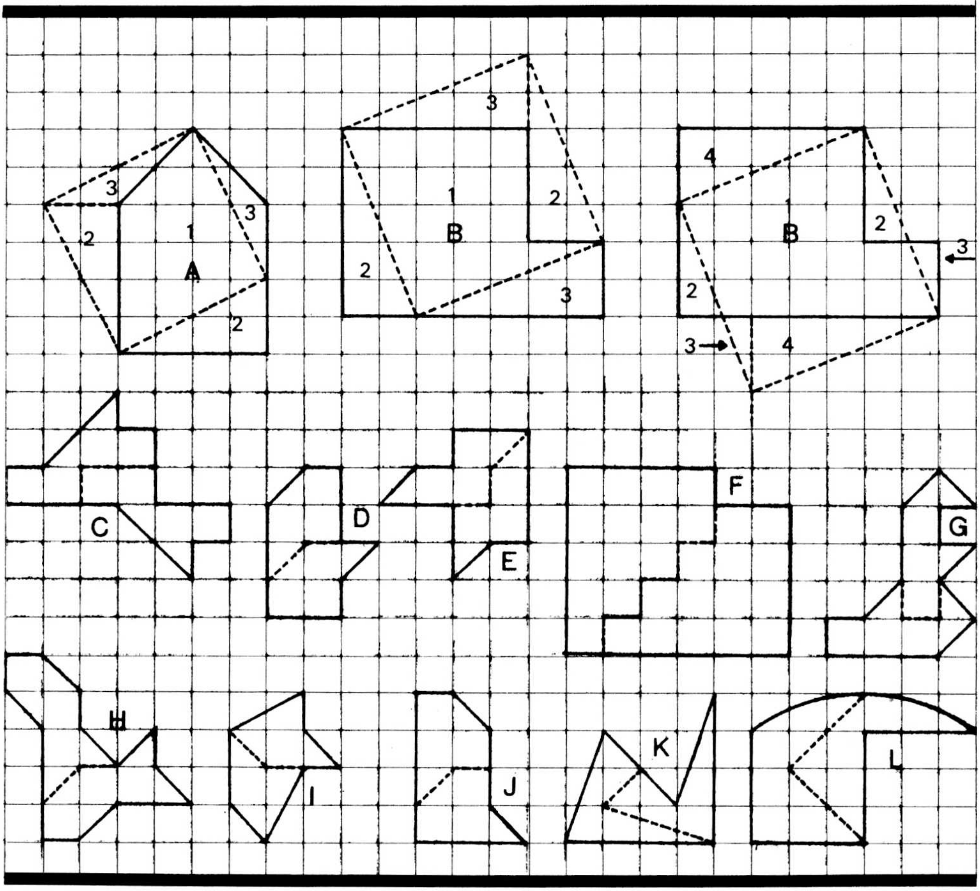


3 retournements par exemple



DEUX PROBLEMES DE DECOUPAGE

Solution



L'ENVOI A DAME

Solutions

Diagramme C : 26-21 (17 x 26) 37-31 (26 x 37) 48-42 (37 x 48) 40-34 (48 x 30) 35 x 2 B +

Diagramme D : 15-10 (14 x 5) 27-21 (16 x 27) 38-32 (27 x 47) 39-33 (47 x 29) 34 x 1 B +

Diagramme E (coup Van Berghen) 26-21 (A -16 x 27) 32x21 (17 x 26) 33-28 (23 x 32) 37x28 (26 x 46) 29-23 (18 x 29) 34x5 (46 x 23) 5 x 46 B +

A. si (17 x 26) 32-28 (23 x 32) 37 x 28 etc., B +

Diagramme F (par Georges POST) 32-27 (36 x 47) 44-39 (35 x 33) 34-30 (24 x 35) 45-40 (35 x 44) 50 x 8 (3 x 12) 38-33 (47 x 21) 33 x 4 (12-17 A) 4 x 11 (16 x 7) 26 x 17 B +

A. si (21-49) 4 x 27 (49 x 21) 26 x 8 B +

Diagramme G (par Repetto) 29-23 (19 x 28 forcé) 47-41 (36 x 47) 34-29 (27 x 36) 37-32 (28 x 37) 29-23 (18 x 29) 35-30 (24 x 44) 33 x 4 (44 x 42) 4 x 41 B +

TRIANGLES DE FERMAT

Solution

1°)

$$12^3 = (9 + \sqrt{5})^3 + (9 - \sqrt{5})^3$$
$$= (a + b)^3 + (a - b)^3 = 2(a^3 + 3ab^2)$$
$$1728 = 2(729 + 135) = 2 \times 864$$

et le côté 12 compris entre la somme 18 et la différence des deux autres $2\sqrt{5}$

2°)

$$(2\,r\,s)^3 = (r^2 + \sqrt{A})^3 + (r^2 - \sqrt{A})^3 \qquad \text{Condition } A \geqslant 0$$
$$8\,r^3 s^3 = 2(r^6 + 3A\,r^2)$$
$$A = \frac{r}{3}(4\,s^3 - r^3); \qquad A \geqslant 0 \Leftrightarrow r < s\,\sqrt[3]{4}$$

Condition d'existence du triangle : $2\sqrt{A} \leqslant 2r\,s \leqslant 2\,r^2$

ou $A \leqslant r^2\,s^2$ et $s \leqslant r$

on s'assure aisément que la deuxième condition est suffisante.

3°)

$$(2\,r\,s)^4 = (r^2 + \sqrt{B})^4 + (r^2 - \sqrt{B})^4 \qquad \text{Condition } B \geqslant 0$$
$$16\,r^4 s^4 = 2(r^8 + 6\,r^4\,B + B^2)$$
$$B^2 + 6\,r^4\,B + 9\,r^8 = 8\,r^8 + 8\,r^4 s^4$$
$$B + 3\,r^4 = \pm\, 2\,r^2\sqrt{2(r^4 + s^4)} \quad \text{le signe — ne peut convenir}$$
$$B = 2\,r^2\sqrt{2(r^4 + s^4)} - 3\,r^4$$

$$B \geqslant 0 \Leftrightarrow 8\,s^4 \geqslant r^4 \Leftrightarrow r \leqslant s\,\sqrt[4]{8}$$

Condition d'existence du triangle : $\underline{2\sqrt{B} \leqslant \mathbf{2\,r\,s \leqslant 2\,r^2}}$

on montrera que la condition soulignée ($s \leqslant r$) réalise l'autre condition donc que $s \leqslant r \leqslant s\,\sqrt[4]{8}$

4°)

$$(2\,r\,s)^5 = (r^2 + \sqrt{C})^5 + (r^2 - \sqrt{C})^5 \qquad \text{Condition } C \geqslant 0$$
$$32\,r^5 s^5 = 2(r^{10} + 10\,r^6 C + 5\,r^2 C^2)$$
$$C^2 + 2\,r^4\,C + r^8 = \frac{1}{5}(16\,r^3 s^5 + 4\,r^8)$$
$$C + r^4 = \pm\sqrt{\frac{1}{5}(16\,r^3 s^5 + 4\,r^8)} \quad \text{le signe — ne convient pas}$$
$$C = \sqrt{\frac{1}{5}(16\,r^3 s^5 + 4\,r^8)} - r^4$$

1ère condition $C \geqslant 0$ $\qquad \frac{1}{5}(16\,r^3 s^5 + 4\,r^8) \geqslant r^8$

$16\,s^5 \geqslant r^5$ ou $r \leqslant s\,\sqrt[5]{16}$

2ème condition : existence du triangle $\underline{2\sqrt{C} \leqslant \mathbf{2\,r\,s \leqslant 2\,r^2}}$

on montrera que la condition soulignée ($s \leqslant r$) réalise l'autre condition donc que $s \leqslant r \leqslant s\,\sqrt[5]{16}$

3,14159	26535	89793	23846	26433	83279	50288	41971	69399	37510
58209	74944	59230	78164	06286	20899	86280	34825	34211	70679
82148	08651	32823	06647	09384	46095	50582	23172	53594	08128
48111	74502	84102	70193	85211	05559	64462	29489	54930	38196
44288	10975	66593	34461	28475	64823	37867	83165	27120	19091
45648	56692	34603	48610	45432	66482	13393	60726	02491	41273
72458	70066	06315	58817	48815	20920	96282	92540	91715	36436
78925	90360	01133	05305	48820	46652	13841	46951	94151	16094
33057	27036	57595	91953	09218	61173	81932	61179	31051	18548
07446	23799	62749	56735	18857	52724	89122	79381	83011	94912
98336	73362	44065	66430	86021	39494	63952	24737	19070	21798
60943	70277	05392	17176	29317	67523	84674	81846	76694	05132
00056	81271	45263	56082	77857	71342	75778	96091	73637	17872
14684	40901	22495	34301	46549	58537	10507	92279	68925	89235
42019	95611	21290	21960	86403	44181	59813	62977	47713	09960
51870	72113	49999	99837	29780	49951	05973	17328	16096	31859
50244	59455	34690	83026	42522	30825	33446	85035	26193	11881
71010	00313	78387	52886	58753	32083	81420	61717	76691	47303
59825	34904	28755	46873	11595	62863	88235	37875	93751	95778
18577	80532	17122	68066	13001	92787	66111	95909	21642	.....

Pour en savoir plus... tournez cette carte.

IMPRIMERIE I&RG AMIENS

Vous venez de lire quelques décimales du célèbre π nombre d'Archimède, extraites du N° spécial (297 pages) écrit et diffusé par le Petit Archimède, revue scientifique interdisciplinaire pour les jeunes de 8 à 22 ans. Pour tout renseignement sur ce N° spécial ou sur le Petit Archimède, écrire à :

LE PETIT ARCHIMÈDE - B.P. 0222 - 80002 AMIENS Cedex France

MATS A GOGO

Dans cette chronique, je vous présente un seul problème imaginé par le célèbre compositeur hongrois : le Dr Laszlo LINDNER. Son titre : Homme contre Ordinateur.

Le diagramme vous propose en fait 36 problèmes.

Mais attention, il ne s'agit pas là d'un problème classique dans lequel il y a lutte entre les deux camps, mais d'un problème de genre AIDE dans lequel Noirs et Blancs collaborent au mat du roi Noir !

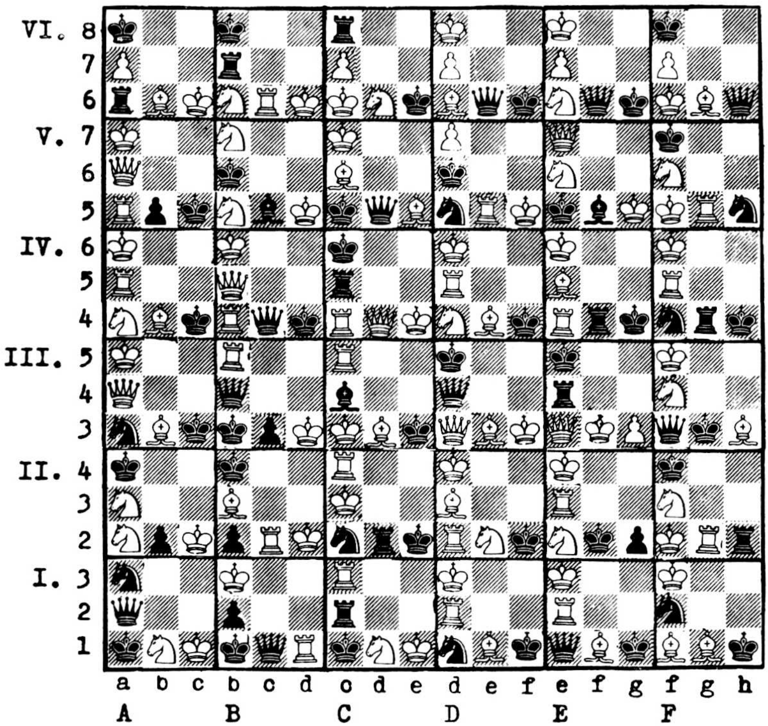
De plus, il faut prendre l'habitude de faire jouer les Noirs en premier. Mais voyons un exemple. Prenons le problème noté par exemple D III. Sur l'échiquier, plaçons le Roi blanc en f3, le Fou blanc en e3, la Dame blanche en d3, la Dame noire en d4 et enfin le Roi noir en d5. Les armées sont prêtes mais il n'y aura pas de combat, les Noirs vont jouer le seul coup permettant aux Blancs de les mater au second coup, soit 1. R d5-e5. Les Blancs jouent alors 1. ... f e3-g5 à quoi les Noirs répliquent par 2. D d4-d6. Les Blancs faisant mat par : 2. D d3-e4 !

Remarquez que l'enchaînement des coups est UNIQUE et que cette suite

On remarquera que chacune de ces compositions est à placer sur un échiquier normal de 8 × 8 cases, selon les coordonnées indiquées. Exemple : dans le probleme D-III la D blanche est en d3.

Dr Laszlo Lindner, 1062 Budapest VI Népköztar sasag u. 54, Hongrie.

TOUS AIDES 2‡



Jumeaux : B-V : PB en b7, et CN en b5, B-VI : PB en b6, C-I : TN en c3, C-II, PN en c2, C-III : CB en d3, D-II : FB en d2, F-VI : TN en h6.

est la seule façon d'obtenir le mat. A vous de découvrir les solutions des autres problèmes. Prenez bien soin de poser correctement les pièces sur l'échiquier et essayez de découvrir les autres mats ; vous allez constater assez vite que ce type de mat n'est pas aussi facile à résoudre que l'on imagine parfois et que même avec l'aide de l'adversaire, il n'est pas toujours si facile de mater.

Pour terminer, je vous ferai remarquer que tous les problèmes présentent la lettre L; c'est du beau travail.

A la prochaine chronique, qui sera plus classique, je vous le promets.

PETIT PHILIDOR.

PI ... ENCORE

Amis lecteurs, vous trouverez pages 37 et 38, une reproduction d'une « carte PI » qui a été beaucoup diffusée. En utilisant tous les moyens de reprographie à votre disposition, nous vous invitons à utiliser cette très belle carte-correspondance pour votre courrier ... et aussi une légitime publicité.

*

LES P.B. DU P.A.

Des solutions

PB 143, PA 81-82-83, p. 57 (Factorielle cent) - Comment calculer 100 ! à l'aide d'une calculatrice de poche, programmable ou non, ne permettant d'afficher que les nombres inférieurs à 10^{100} ?

Personne n'a répondu à cette question, un peu vague, il est vrai. Mais quand un problème semble mal posé il est toujours possible d'en trouver une meilleure formulation. Cela fait peut-être partie du problème...

Il s'agit d'en apprendre le plus possible sur 100 ! à l'aide d'une calculatrice de poche, de déterminer ce nombre avec une incertitude relative la plus faible possible.

L'auteur de l'énoncé, Bernard Michaud, propose d'utiliser la **formule de Stirling :**

$$n! \simeq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

D'où sort-elle ? Voir P.A. spécial π, p. 82.

Comment s'en servir ?

On calcule $e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ pour $n = 100$, ce qui donne $9{,}324847627.10^{-43}$, et il reste à le multiplier par $n^n = 10^{200}$, d'où $100 ! \simeq 9{,}324847627.10^{157}$.

Bien sûr, nous bénéficions du fait que 100 est une puissance de 10. Pour calculer 90 !,, par exemple, on ne peut procéder ainsi. Dans ce cas, l'idée de Bernard Michaud est de calculer séparément $a = n^{n/2}$ et $b = n^{n/2}e^{-n}\sqrt{2\pi n}$
Pour $n = 90$,
il vient : $a \simeq 8{,}727963568.10^{87}$
et $b \simeq 1{,}700672709.10^{50}$. On

effectue alors le produit ab en oubliant provisoirement les puissances de 10, c'est-à-dire que l'on détermine le produit de 8,727... par 1,700..., qui donne : 14,84340945. D'où :

$$90\,! \simeq 1{,}484340945.10^{138}$$

Mais cette méthode présente deux inconvénients : elle utilise une formule approchée, et elle n'est valable que jusqu'à $n = 100$.

On pouvait penser aussi à calculer séparément le produit 1.2.3 ... 68.69, puis le produit 70.71 ... 99.100, puis à effectuer le produit des deux en omettant les puissances de 10, comme nous venons de le voir. Ceci se réalise aisément sur une calculatrice programmable : il suffit de construire le programme de calcul de

$A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$, et on le fait tourner deux fois en écrivant :

$$100\,! = 69\,!\,A_{100}^{31} = A_{69}^{69}\,A_{100}^{31}.$$

On trouve ainsi :

$$69\,! \simeq 1{,}711\,224\,522 \,.\, 10^{98}$$

$$A_{100}^{31} \simeq 5{,}453\,767\,991 \,.\, 10^{59}$$

d'où : $100\,! \simeq 9{,}332\,621\,523 \,.\, 10^{157}$

Méthode un peu longue, et hasardeuse : il faut bien être sûr, au départ, que chacun des facteurs est inférieur à 10^{100}. Mais le résultat est certainement plus exact que le précédent, dont il s'écarte à partir du troisième chiffre.

Troisième idée : il y a une fonction qui est utilisée couramment pour aplatir les trop grandes variations, et c'est la fonction log. Alors, on calcule :

$$\log 100\,! = \log 1 + \log 2 + \ldots + \log 100,$$

puis on coupe la partie entière du résultat, il reste un réel x compris entre 0 et 1, on calcule 10^x et c'est terminé - la partie entière supprimée fournissant l'exposant de 10. Ceci donne :

$$\log.\ 100\,! \simeq 157{,}9700037$$

$$100\,! \simeq 9{,}332622518.10^{157}$$

Quatrième idée, due à Chevalier, ancien élève du lycée Henri Wallon, d'Aubervilliers : puisque le produit 1-2-3 ... 99.100 est trop grand, on calcule plutôt :

$\frac{1}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} \ldots \frac{99}{10} \cdot \frac{100}{10}$. Il restera à multiplier le produit par 10^{100}. Le résultat est alors :

$$100\,! \simeq 9{,}332621532.10^{157}$$

Il est enfin permis de penser à **combiner** ces méthodes. Par exemple, utiliser la formule de Stirling sous la forme logarithmique, avec termes complémentaires pour améliorer la précision (voir P.A. Spécial π, pp. 86-87). Je vous laisse expérimenter ces suggestion, déterminer jusqu'où chacune d'elles peut aller, comparer leur précision ... et me faire part de vos réflexions.

Si l'on veut que cette précision soit parfaite, c'est-à-dire si l'on veut **tous** les chiffres de n !, alors il faut travailler en « multiprécision », mais il s'agit là de technique de programmation, ce qui sort du cadre de la présente rubrique. Voyez alors la revue « l'Ordinateur de Poche » de mars-avril 1982, qui présente un programme donnant n ! en précision **absolue** jusqu'à $n = 490$. Mais ce programme est fort tributaire des capacités spécifiques des TI 58 et 59.

PB 145, PA 84-85, p. 43 (dix C_n^k pairs) - Existe-t-il une ligne du triangle de Pascal contenant exactement **dix** termes pairs ?

Représentons le triangle de Pascal modulo 2 en portant, à l'intersection de la ligne numéro n et de la colonne numéro k, non pas C_n^k mais le reste par 2 de C_n^k que nous noterons R_n^k Nous pouvons construire ce tableau de proche en proche, comme on le fait pour le triangle de Pascal habituel, à l'aide de la relation :

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

Cette relation devient ici :

$$R_n^k = R_{n-1}^k \oplus R_{n-1}^{k-1}, \ (1),$$

la loi $\oplus$ étant l'addition dans Z/2Z, définie par : $0 \oplus 0 = 0$, $1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1$, $1 \oplus 1 = 0$. Autrement dit :
pair+ pair = pair,
impair + pair = impair, etc.

Sur ce tableau (Figure 1), on peut constater que les lignes dont le numéro est de la forme $2^m - 1$ ne comportent que des « 1 », en nombre égal à 2^m. Si l'on admet ceci, alors la ligne suivante, de numéro 2^m, commence par un « 1 », puis $2^m - 1$ fois « 0 », puis encore une fois « 1 » (Figure 2).

Si l'on considère les seuls termes figurant dans les colonnes dont les numéros vont de 0 à $2^m - 1$, alors on voit que la ligne 2^m reproduit la ligne 0. Les mêmes causes produisant les mêmes effets, chaque ligne se déduisant de la précédente par la relation de récurrence (1), il est fatal que la ligne $2^m + 1$ reproduise la ligne 1, et ainsi de suite jusqu'à la ligne $2^{m+1} - 1$, qui reproduit la ligne $2^m - 1$ et ne comporte que des 1, du moins pour les numéros de colonnes allant de 0 à $2^m - 1$. C'est un peu délicat à expliquer, mais c'est plus clair sur les figures 1 et 2.

Le même phénomène se reproduit pour les termes suivants, ceux dont les numéros de colonnes vont de 2^m à $2^{m+1} - 1$. Sur la ligne 2^m il y a un « 1 » à la colonne 2^m, suivi de $2^m - 1$ zéros, et ainsi de suite. De sorte que la ligne $2^m + t$ s'obtient en écrivant la ligne t, complétée par le nombre de zéros suffisants pour avoir en tout 2^m termes, et encore une fois la ligne t. Ceci, du moins, pour t tel que : $0 \leqslant t < 2^m$.

En résumé, si l'on appelle T_m le tableau du triangle de Pascal mod.2 limité à 2^m lignes et colonnes, la figure 3 indique comment obtenir T_{m+1} : on reproduit à côté de T_m un tableau de dimensions égales rempli de « 0 » puis, dessous, deux copies de T_m côte à côte. La figure 1 illustre ceci dans le cas où m = 3.

Il en résulte que la ligne numéro $2^{m+1} - 1$, tout comme la ligne $2^m - 1$, ne comporte que des « 1 » : tout ceci a donc bien été démontré par récurrence.

Nous pouvons en déduire un moyen pratique de détermination de la ligne numéro **n**. D'après ce qui précède, si l'on a $2^m \leqslant n < 2^{m+1}$ et $n = 2^m + t$, alors la ligne **n** reproduit en double la ligne **t**. On recommence pour la ligne numéro **t**, et ainsi de suite. Mais il faut veiller à prendre la ligne **t** avec 2^m termes, en complétant avec autant de zéros qu'il est nécessaire.

Par exemple, si n = 13 = 8 + 5, on redouble la ligne 5 prise avec 8 termes, et l'on obtient :

1100110011001100

Nous avons repris la ligne 5 sur la figure, mais nous aurions pu la fabriquer en écrivant 5 = 4 + 1 et en redoublant la ligne 1, complétée à 4 termes.

Précisons encore ceci. Pour déterminer exactement la ligne n, la procédure décrite ci-dessus revient à écrire n dans le système binaire. Par exemple n = 13 (décimal) s'écrit 1101. On prend de droite à gauche les chiffres successifs de ce nombre binaire et, à chaque chiffre, on double le nombre de termes. Mais si le chiffre est 1, on écrit deux fois la suite précédente de termes ; alors que si le chiffre est 0, on complète avec des zéros.

On commence à 1 si le chiffre de droite est 0 et à 11 s'il est 1. Voici le résultat pour n = 13, ou 1101 en binaire :

Le premier chiffre à droite, 1 donne : 11
Le second à droite, 0, donne : 1100
Le 3e à droite, 1, donne : 1100 1100
Le 4e, 1, donne : 1100110011001100

Ceci n'est sans doute pas trop difficile à programmer sur micro-ordinateur.

Conséquence : toutes les fois que l'on rencontre « 1 » dans l'écriture binaire de **n**, on double le nombre de « 1 » sur la ligne numéro **n**. Au total, le nombre de « 1 » sur cette ligne sera donc 2^a, où **a** désigne le nombre de « 1 » dans l'écriture binaire de **n**, qui est encore égale à la somme des chiffres de cette écriture binaire.

Exemple : Si n = 13, alors a = 3 et $2^a = 8$: il y a bien 8 fois « 1 » sur la ligne n° 13.

Venons-en à la question posée : supposons qu'il y ait **dix** termes pairs sur la ligne numéro n, non compris, bien sûr, les zéros qui terminent cette ligne, aux colonnes **k > n**. On aura donc : $2^a + 10 = n + 1$, soit $n = 2^a + 9$. Or le nombre 9 s'écrit 1001 en binaire. Si a n'est égal, ni à 0, ni à 3, le nombre **n** s'écrira en binaire avec 3 chiffres « 1 », d'où à = 3 : contradiction. Si a = 3, alors n = 17, qui s'écrit 10001 en binaire, et donc a = 2 : encore impossible. Enfin, on ne peut avoir a = 0 que si n = 0, ce qui n'est pas. **Réponse négative.**

Ce problème a été quelque peu boudé par nos lecteurs. S'ils désirent en savoir plus sur les restes des coefficients binomiaux, qu'ils se plongent dans la monumentale « Théorie des Nombres » de Lucas (Blanchard, éditeur), p. 418. Je leur signale pour finir une jolie propriété : pour déterminer l'exposant du nombre premier **p** dans la décomposition de C_n^k, on écrit **n** et **n — k** en base **p** et on les additionne : le nombre de retenues dans cette addition donne l'exposant cherché.

PB 146, PA 84-85, p. 43 (trois calculateurs) - Soient trois personnes nommées A, B, C, en état de calculer et de raisonner. On veut leur faire deviner trois nombres inconnus x, y, z qui sont des entiers positifs. On leur indique que le produit de deux de ces nombres est 120 et que la somme de deux d'entre eux est 25. On donne à A la valeur de x, à B la valeur de y, à C la valeur de z.

Sur ce, chaque sujet déclare que ces données ne lui permettent pas de déterminer les deux inconnues qui lui manquent. Mais A se ravise alors et donne y et z. Quels sont ces deux nombres ?

Si l'une des trois personnes, par exemple A, se voyait attribuer un nombre x non diviseur de 120, elle saurait que le produit des deux autres nombres, y et z, est 120. Mais il n'existe pas de couples d'entiers dont la somme soit 25 et le produit 120 car l'équation $x^2 - 25x + 120$ n'a pas de solutions entières. Donc c'est la somme x + y, ou x + z, qui vaudrait 25. Et notre héros serait à même de déterminer les trois nombres, de prime abord. Comme cela n'est pas le cas, il faut en conclure que **les trois nombres** x, y, z sont diviseurs de 120.

Au départ, les cas possibles sont au nombre de 12, obtenus en prenant deux nombres dont le produit est 120 et en ajoutant le complément à 25 de l'un d'eux :

1,120,24	4,30,21	6,20,5	8,15,17
2, 60,23	5,24,1	6,20,19	10,12,13
3,40,22	5,24,20	8,15,10	10,12,15

D'après la remarque précédente, seules conviennent les solutions formées de trois diviseurs de 120 ; il en reste **six** :

1,120,24	5,24,20	8,15,10
5,24,1	6,20,5	10,12,15

Mais si l'un des trois chercheurs avait un nombre figurant une seule fois dans ce tableau, il trouverait nécessairement les deux autres. Ce qui exclut 120, 6, 8, 12 et ne laisse que deux cas possibles : 5, 24, 1 et 5, 24, 20.

Chacun des trois ayant fait ce raisonnement, ceux qui possèdent 5 ou 24 ne peuvent trancher entre les deux possibilités restantes. Comme A **découvre y et z, le nombre qui lui a été** affecté est forcément 1 ou 20, et les deux autres nombres, y et z, sont 5 et 24.

J'ai reçu une solution très concise de M. Auzias, auteur de l'énoncé, une de M. Barrière, de Clermont-Ferrand, et une, partielle, de Mme Chrétien, de Villemomble. La solution ci-dessus est un mélange des trois.

PB 147, PA 84-85, p. 43 (partage diamétral) - Prouver ou réfuter : étant donnés cent points sur un cercle, il y a toujours un diamètre de ce cercle qui partage le plan en deux demi-plans contenant chacun cinquante de ces points.

Il s'agit bien entendu de deux demi-plans **ouverts**, privés de leur droite-frontière. Si vous avez cherché ce problème, vos tentatives vous auront persuadé que la réponse est **oui**, que ce diamètre existe. C'est ce que nous voulons démontrer.

Si un tel diamètre existe, il en existe une infinité car on peut toujours le faire tourner d'un certain angle (petit) en lui conservant la même propriété. Nous pouvons alors ôter de nos 100 points toutes les paires de points diamétralement opposés car si un diamètre convient aux 2n points restants, de deux choses l'une : ou bien il ne porte aucune des paires de points ôtés, et alors les points de chacune de ces paires sont situés de part et d'autre de ce diamètre ; ou bien il porte une de ces paires et on peut le faire tourner pour revenir au premier cas.

On considère donc 2n points sur un cercle de centre O et de rayon 1, points non diamétralement opposés deux à deux. Notons-les P_1, P_2, ... P_{2n} (Voir figure 4). Choisissons un diamètre AA' ne portant aucun des points P_i. Orientons le cercle dans le sens trigonométrique, prenons A pour origine des arcs. Notons α_1, α_2, ... α_{2n} les abscisses curvilignes de P_1, P_2, ... P_{2n}, comprises entre $-\pi$ et π. Pour chaque P_i d'abscisse curviligne négative, on note P'_i le point diamétralement opposé. On a donc, sur le demi-cercle situé au-dessus du diamètre AA', 2n points qui sont des P_i ou des P'_i. Soit k le nombre des P_i et donc $2n - k$ le nombre des P'_i. Si $k = n$, c'est terminé : le diamètre AA' convient. Supposons donc $k > n$, d'où $k > 2n - k$.

On peut définir une fonction f sur l'intervalle $[0, \pi]$, à valeurs dans N, en associant, à tout x, le nombre des points P_i situés dans l'intervalle $]x, x + \pi[$. C'est une fonction en escalier qui augmente de 1 chaque fois que la variable traverse l'abscisse curviligne d'un point P'_i et qui diminue de 1 chaque fois qu'elle traverse un point P'_i. On a $f(0) = k$ et $f(\pi) = 2n - k$.

Nous avons ainsi construit une fonction en escalier à valeurs entières, qui ne fait que des sauts de 1 ou de -1. Il est clair qu'elle prend nécessairement toutes les valeurs entières comprises entre k et $2n - k$, donc en particulier la valeur **n.**

Pour y voir plus clair, on peut d'ailleurs représenter cette fonction par un trajet sur un quadrillage, les ordonnées représentant les valeurs successives de f(x), le point mobile se déplaçant d'une unité vers le haut lorsque f(x) augmente de 1 et vers le bas lorsqu'il diminue de 1. La figure 5 représente le trajet associé à l'exemple de la figure 4.

Si M est un point d'abscisse curviligne x telle que $f(x) = n$, et si M n'est pas un point P_i ni un point P'_i, alors le diamètre D passant par M répond à la question.

Ce problème a été résolu par MM. Garcin, professeur à Carnot, et M. Vidiani. Un problème posé cette année au Rallye Mathématique d'Alsace se résout de façon tout à fait similaire :

« Dans un plan sont dessinés n points marqués en rouge et n points marqués en bleu (n entier, $n \geqslant 2$), de façon que jamais trois de ces 2n points ne soient alignés. Montrer qu'il existe une droite, ne passant par aucun de ces points, qui partage le plan en deux demi-plans tels que, à la fois,

a) chaque demi-plan contient au moins un des points ;

b) il y a autant de points rouges que de points bleus dans chaque demi-plan. »

PB 148, PA 84-85, p. 143 (en permutant les aiguilles) - A quelles heures est-il possible d'intervertir l'aiguille des minutes et celle des heures, de sorte que la nouvelle position des aiguilles, ainsi obtenue, soit une position que ces aiguilles peuvent effectivement occuper dans leur course normale ?

Soit G la grande aiguille et P la petite, et M la position minuit (ou midi), **origine** (Voir figure 6). Contrairement aux Saintes Habitudes, orientons les angles dans le sens, justement, des aiguilles d'une montre et adoptons comme unité le **tour.**

La position des aiguilles est alors repérée par les mesures d'angles $g = \widehat{M, G}$ et $p = \widehat{M, P}$, qu'on peut toujours prendre dans l'intervalle $[0, 1[$.

Un instant donné sera représenté par un réel t de l'intervalle $[0, 12[$, qui marque le nombre d'heures écoulées entre minuit et l'instant considéré, si cet instant est situé entre minuit et midi. Par exemple, pour 3 h 15 mn, on prend $t = 3{,}25 = 13/4$.

Avec toute ces conventions, on a : $p = t/12$ et $g = t - [t]$, où $[t]$ désigne la partie entière de t. Réciproquement, si x et y sont deux réels de l'intervalle $[0, 1[$, le couple (x, y) correspond à une position d'aiguilles (p, g) si et seulement si le réel $12x - y$ est entier. Dans ce cas, on a : $p = a$, $g = b$ et $t = 12x$.

Dès lors, pour que (x, y) représente une position d'aiguilles permutable, il faut et il suffit que x et y vérifient :

$$\begin{cases} 12x - y = u \\ 12y - x = v \end{cases}$$

avec **u** et **v** entiers. En résolvant ce système, on trouve : $x = \frac{1}{143}(12u + v)$.

Bref, x est de la forme $k/143$, avec k entier. Et, comme il faut que l'on ait $0 \leqslant x < 1$, on doit prendre k tel que $0 \leqslant k < 143$. Il y a donc, entre minuit et midi, l'un inclus et l'autre exclu, **143** instants où les aiguilles sont permutables : environ un toutes les 5 mm. Ils sont donnés par la formule : $t = \frac{12k}{143}$ avec k entier, $0 \leqslant k < 143$.

Le premier de ces instants est minuit lui-même. Et bien sûr, lorsque les aiguilles sont superposées, on peut les intervertir. Ceci arrive toutes les fois que $g = p$, soit $t = 12t - 12[t]$, ou encore $t = \frac{12\ m}{11}$ avec m entier, $0 \leqslant m < 11$. Ce qui donne onze instants, se succédant à intervalles réguliers de $\frac{12}{11}$ d'heure, soit 1 h 5 mn 27 s $\frac{3}{11}$. L'heure du dernier avant midi est donc $\frac{120}{11}$, c'est-à-dire : 10 h 54 mn 32 s $\frac{8}{11}$. Ces cas particuliers sont bien fournis par la formule $t = 12\ k/143$ lorsque l'on prend k multiple de 13.

Si l'on oublie ces solutions triviales, il reste 132 instants où les aiguilles sont distinctes et permutables et qui, bien sûr, s'associent deux par deux. Par exemple, pour pour k = 27, on trouve $\frac{324}{143}$,
soit : 2 h 15 mn 56 s et des fourmis (comme dit San-Antonio), ce qui donne $p = \frac{27}{143}$ et $g = \frac{38}{143}$. La position duale des aiguilles, obtenues par permutation d'icelles, est définie par : $g' = \frac{27}{143}$ et $p' = \frac{38}{143}$, qui indiquent l'instant $t' = \frac{456}{143}$, soit à peu de chose près : 3 h 11 mn 19 s.

Cette solution particulière, avec plusieurs autres, a été trouvée par M. Baudoin, de la Ferté St-Aubin. M. Vidiani a déterminé la méthode à suivre.

Sigalons que si l'on prend k multiple de 11, alors les aiguilles forment un angle dont la bissectrice est la droite joignant 12 h à 6 h. La réciproque est vraie : lorsque les aiguilles occupent une telle position alors elles sont permutables. Ce qui n'est nullement évident a priori.

Vous pouvez enfin vous amuser à chercher, parmi ces positions permutables distinctes, laquelle forme le plus petit angle et laquelle forme le plus grand, ainsi que tout problème que peut vous suggérer la contemplation d'un cadran de montre (Voir P.A. 29-30), au temps jadis.

n \ k	0 1 2 3	4 5 6 7
0	1 0 0 0	0 0 0 0
1	1 1 0 0	0 0 0 0
2	1 0 1 0	0 0 0 0
3	1 1 1 1	0 0 0 0
4	1 0 0 0	1 0 0 0
5	1 1 0 0	1 1 0 0
6	1 0 1 0	1 0 1 0
7	1 1 1 1	1 1 1 1

figure 1

	$0m \ldots 2^m-1$	$2m \ldots 2^{m+1}-1$
0	1 0 0 0	0 0 0 0
.	1 1 0 0	0 0 0 0
.	1 0 1 0	0 0 0 0
2^m-1	1 1 1 1	0 0 0 0
2^m	1 0 0 0	1 0 0 0
.	1 1 0 0	1 1 0 0
.	1 0 1 0	1 0 1 0
$2^{m+1}-1$	1 1 1 1	1 1 1 1

figure 2

	$0 \ldots 2^m-1$	$2^m \ldots 2^{m+1}-1$
$0 \ldots 2^m-1$	T_m	0
$2^m \ldots 2^{m+1}-1$	T_m	T_m

figure 3

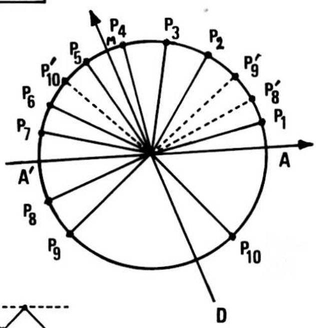


figure 4

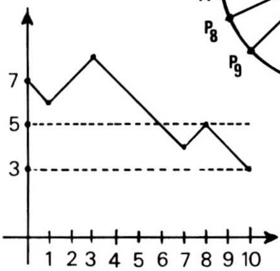


figure 5

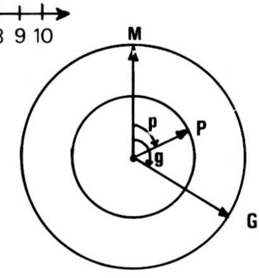


figure 6

LE PETIT ARCHIMÈDE

Revue de l'Association pour le Développement de la Culture Scientifique

10 numéros par an

ABONNEMENT 1983

Abonnement de Soutien : **120F** ☐ (1)

Abonnement de Bienfaiteur : 500F ☐ (1)

Abonnement ordinaire : **60F** ☐ (1)

Abonnements groupés (minimum 10) : **40F**

(Ils peuvent être servis à une ou plusieurs adresses) ☐ (2)

MAJORATION POUR TOUT ENVOI HORS EUROPE
ou PAR AVION (le préciser) de 50 %

Toutes les collections anciennes sont disponibles :

N° 1 à 10, 11 à 20, 21 à 30, 31 à 40, 41 à 50, 51 à 60, 61 à 70, 71 à 80, 81 à 90 : 50 F

Prix de vente au n° 10 F

PRODUCTIONS SPECIALES

Le nouveau calendrier perpétuel : 50 F le paquet de cinquante ☐ (3)
(en voie d'épuisement)

N° Spécial PA Sp1 (index général PA1 à PA50) : 5 F ☐ (1)

N° Spécial Pi : 75 F - A partir de 4 exemplaires : 70 F l'unité
A partir de 10 exemplaires : 60 F l'unité ☐ (2)

NOM : Prénom :

Adresse d'expédition :

Code Postal : Ville :

Bureau distributeur :

Cette demande est à adresser exclusivement à :

ADCS - Abonnement - B.P. 0222 - 80002 AMIENS Cedex

Joindre chèque ou mandat à l'ordre de :

ADCS

(1) cocher les cases utiles

(2) Nombre d'exemplaires

(3) Nombre de paquets de cinquante cartes postales

LES ETABLISSEMENTS SCOLAIRES PEUVENT-ILS ÉVITER LES DEMANDES DE FACTURE ? MERCI

Adresser toute correspondance rédactionnelle à :

Y. ROUSSEL - B.P. 0222 - 80002 AMIENS Cedex

Revue éditée par l'A.D.C.S. - Le Directeur de la publication J.C. HERZ

IMPRIMERIE I & RG AMIENS Tél. 92.60.16

No 91-92 : 12 F

ATTENTION, l'abonnement 1983 est à 60 F